Sonderabdruck aus Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 62. Band. 1913. Heft 1.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Über ein Problem der Wärmeleitung und dessen Anwendung auf die Theorie des solaren Klimas.

Von M. MILANKOVITCH in Belgrad.

Inhaltsangabe.

In der vorliegenden Abhandlung wird zuerst das folgende Problem der Wärmeleitung behandelt:

Eine der beiden Begrenzungsebenen einer unendlich ausgebreiteten Platte endlicher Dicke wird auf einer konstanten Temperatur gehalten, während die andere periodischen Temperaturänderungen unterworfen ist, welche sich als Superposition zweier harmonischer Änderungen von verschiedener Periode darstellen lassen. Man soll die Temperaturschwankungen im Innern der Platte bestimmen.

Nach Erledigung dieses Problems werden die gewonnenen Ergebnisse auf die Theorie des solaren Klimas angewendet, unter welchem bekanntlich jenes hypothetische Klima verstanden wird, welches sich auf der überall fest gedachten Erdoberfläche einstellen würde, wenn diese von keiner Atmosphäre umgeben wäre.

Der zweite Teil der Abhandlung befaßt sich mit der Bestimmung der Temperaturänderungen, welche sich unter den vorher angegebenen Voraussetzungen auf einer beliebig gewählten Stelle der Erdoberfläche einstellen würden.

Trabert[1]) hat eine diesbezügliche Berechnung angestellt unter der Annahme, daß die Temperatur der Erdoberfläche das Ergebnis folgender zweier Wärmebewegungen ist: der Wärmezufuhr durch die Sonnenstrahlung und der Wärmeabfuhr infolge der Ausstrahlung in den interplanetarischen Raum. Die Bedingung, daß sich die Einstrahlung und die Ausstrahlung das Gleichgewicht halten müssen, ergibt die mittlere Temperatur des in Betracht gezogenen Zeitraumes.[2]) Die Bewegung der Wärmemengen von der Oberfläche der Erde gegen das Innere und umgekehrt als eine Folge der Wärmeleitung hat Trabert bei seinen Berechnungen nicht in Betracht gezogen. Indessen ist der Einfluß der Wärmeleitung nicht zu vernachlässigen, und es ist leicht zu ersehen, in welchem Sinne sich dieser geltend machen wird.

Es ist eine bekannte Tatsache, und sie folgt auch aus der Fourierschen Theorie der Wärmeleitung, daß die Temperaturschwankungen der Erdoberfläche in einer ziemlich geringen Tiefe nicht mehr wahrnehmbar sind. So kann man nach Trabert[3]) annehmen, daß sie im festen Lande in einer Tiefe von 10 m verschwindend klein werden. Es braucht demnach bei der Untersuchung der Bewegung der Wärmemengen infolge der Leitung nur die oberste Schichte der Erdkruste mit einer Dicke von 10 m in Betracht gezogen zu werden. Die untere Fläche dieser Schichte hat auf einer beliebig gewählten Stelle der Erde eine konstante Temperatur, welche sich wenig von der mittleren Jahrestemperatur der Oberfläche unterscheidet. Die Temperaturänderungen der Oberfläche haben einen doppelt oszillatorischen Charakter, indem sie die Superposition der täglichen und der jährlichen Änderungen darstellen. Im Sommer wird die mittlere tägliche Temperatur der Oberfläche höher sein als die Temperatur, auf welcher die untere Begrenzungsfläche der betrachteten Schichte konstant gehalten wird, und es

1) Trabert, Das „solare" Klima. Meteor. Zeitschr. 1894, S. 425.

2) Siehe auch: Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik, Leipzig 1911, S. 487.

3) Ebenda S. 502.

wird sich demnach in dieser Jahreszeit ein Wärmefluß von der Oberfläche gegen das Innere der Erde einstellen, was zur Folge haben wird, daß die Temperatur der Erdoberfläche niedriger sein wird als sie ohne Berücksichtigung der Wärmeleitung wäre. Das Umgekehrte wird im Winter eintreten.

Die Wärmeleitung vermindert demnach die Amplitude der Temperaturschwankungen und ihr Einfluß kann unter Umständen sehr bedeutend sein. Trabert, der diesen Einfluß nicht berücksichtigte, gibt z. B. in der vorher erwähnten Abhandlung die mittleren Temperaturen des kältesten bzw. des wärmsten Monats am Pole mit $-273°$C, bzw. $+82°$C an. Wird die Wärmeleitung berücksichtigt, so ergeben sich bedeutend kleinere Temperaturschwankungen und es erweist sich die Notwendigkeit, bei der Bestimmung der Temperaturen des solaren Klimas auch den Einfluß der Wärmeleitung in Betracht zu ziehen. Das Endziel dieser Abhandlung ist die quantitative Bestimmung dieses Einflusses und der Entwurf einer Theorie des solaren Klimas, welche diesen Einfluß berücksichtigt.

Das Problem der Wärmeleitung.

Um das eingangs formulierte Problem der Wärmeleitung zu lösen, wird vor allem die Fouriersche Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

heranzuziehen sein. In derselben bedeutet x die Entfernung eines beliebigen Punktes im Innern der Platte von jener Begrenzungsebene, welche periodischen Temperaturänderungen unterworfen ist, u die Temperatur dieses Punktes zur Zeit t und K^2 den Temperatur-Leitungskoeffizienten der Platte. Bezeichnen wir mit k die Wärmeleitfähigkeit, mit c die spezifische Wärme und mit ϱ die Dichtigkeit der Substanz der Platte, so besteht die Beziehung:

$$K^2 = \frac{k}{c\varrho}.$$

Die Begrenzungsebene $x = 0$ der Platte sei periodischen Temperaturänderungen unterworfen, welche durch den Ausdruck:

$$u = u_0 + A \cos\frac{2\pi}{T}(t - t_0) + a \cos\frac{2\pi}{\tau} t$$

darstellbar sind, worin u_0, A, T, τ und t_0 Konstanten bezeichnen. Diese Temperaturveränderungen sind also eine Superposition zweier harmonischer Oszillationen, und wir nehmen an, daß die Periode T der langsameren Oszillation bedeutend größer ist als die Periode τ der schnelleren Oszillation, so zwar, daß der Quotient

$$\frac{\tau}{T}$$

eine sehr kleine Zahl ist.

Die Amplitude A der langsamen Oszillation ist konstant, die Amplitude a der schnelleren Oszillation kann sich mit der Zeit langsam ändern, doch so, daß der Differentialquotient

$$\frac{da}{dt}$$

immer eine sehr kleine Zahl bleibt.

Die Dicke der Platte sei h. Diese Größe soll der Bedingung genügen, daß der Ausdruck

$$e^{-\frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

ebenfalls eine sehr kleine Zahl ist.

Die andere Begrenzungsebene $x = h$ der Platte soll auf der konstanten Temperatur v_0 gehalten werden. Unsere Aufgabe ist demnach die folgende:

Man finde das Integral der Gleichung (1), welches folgenden Grenzbedingungen Genüge leistet:

$$(2)\left\{\begin{array}{l} \text{für } x = 0 \\ u = u_0 + A\cos\frac{2\pi}{T}(t - t_0) + a\cos\frac{2\pi}{\tau}t \end{array}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \text{für } x = h \\ u = v_0. \end{array}\right.$$

Dabei sind die Größen:

$$\frac{\tau}{T}, \quad \frac{du}{dt}, \quad e^{-\frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

gegenüber den übrigen sehr klein.

Setzen wir:

$$(4) \quad u = u_0 + A\cos\frac{2\pi}{T}(t - t_0) + \frac{x}{h}\left[v_0 - u_0 - A\cos\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right] + a e^{\alpha t + \beta x}.$$

Diese Funktion genügt bei entsprechender Wahl der Konstanten α und β der Gleichung (1), denn es ist:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\pi}{T}A\left(\frac{x}{h} - 1\right)\sin\frac{2\pi}{T}(t - t_0) + e^{\alpha t + \beta x}\frac{da}{dt} + a\alpha e^{\alpha t + \beta x}.$$

Da jedoch sowohl $\frac{A}{T}$ als auch $\frac{da}{dt}$ sehr klein sind, so können die ersten zwei Glieder der rechten Seite vernachlässigt werden, so daß:

$$(5) \quad \frac{\partial u}{dt} = a\alpha e^{\alpha t + \beta x}.$$

Es ist weiter:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\beta^2 e^{\alpha t + \beta x}.$$

Setzen wir die Ausdrücke (5) und (6) in die Gleichung (1) ein, so sehen wir, daß diese befriedigt sein wird, wenn die Beziehung besteht:

$$\alpha = K^2\beta^2.$$

Nehmen wir an, β sei komplex, d. h. setzen wir statt β die Ausdrücke:

$$p + i\beta, \quad p - i\beta$$

und statt α:

$$K^2(p + i\beta)^2 = K^2(p^2 - \beta^2) + 2i\beta p K^2$$
$$K^2(p - i\beta)^2 = K^2(p^2 - \beta^2) - 2i\beta p K^2.$$

Dann können wir die Größe:

$$e^{\alpha t + \beta x}$$

durch eine der folgenden zwei ersetzen:

$$e^{K^2(p^2 - \beta^2)t + 2i\beta p K^2 t + px + i\beta x}$$
$$e^{K^2(p^2 - \beta^2)t - 2i\beta p K^2 t + px - i\beta x},$$

oder, noch allgemeiner, durch deren Summe, nachdem wir die erste mit einer willkürlichen Konstanten C', die zweite mit C'' multipliziert haben. Infolgedessen kann dem letzten Gliede der Gleichung (4) folgende Form gegeben werden:

$$a e^{K^2(p^2 - \beta^2)t + px}\left\{C' e^{i\beta(x + 2pK^2 t)} + C'' e^{-i\beta(x + 2pK^2)t}\right\},$$

oder mit Rücksicht auf die Eulerschen Formeln:

$$a e^{K^2(p^2 - \beta^2)t + px}\left\{(C' + C'')\cos\beta(x + 2pK^2t) + i(C' - C'')\sin\beta(x + 2K^2t)\right\}$$

Setzen wir

$$C' + C'' = C_1, \quad i(C' - C'') = C_2,$$

wo demnach C_1 und C_2 wieder zwei willkürliche Konstanten bedeuten, und außerdem:

$$p = \beta,$$

so kann der durch die Gleichung (4) dargestellten Funktion folgende Form gegeben werden:

$$(7) \quad \begin{aligned} u = u_0 + A\cos\frac{2\pi}{T}(t - t_0) + \frac{x}{h}\left[v_0 - u_0 - A\cos\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right] \\ + a e^{px}\{C\cos(px + 2p^2K^2t) + C_2\sin(px + 2p^2K^2t\}. \end{aligned}$$

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (1) und hat eine solche Form, daß sie bei entsprechender Wahl der Konstanten auch den Grenzbedingungen (2) und (3) Genüge leistet; denn setzen wir:

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad p = -\frac{1}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}},$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} u = u_0 + A\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0) + \frac{x}{h}\Big[v_0 - u_0 - A\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\Big] \\ + a e^{-\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}\cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = 0$, so erhalten wir:

$$u = u_0 + A\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0) + a\cos\frac{2\pi}{\tau}t,$$

d. h. die Funktion (8) befriedigt die Grenzbedingung (2). Setzen wir in (8) $x = h$, so erhalten wir:

$$u = v_0 + a e^{-\frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}\cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\Big).$$

Da aber

$$e^{-\frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

sehr klein ist, so ist mit großer Annäherung:

$$u = v_0,$$

und die Grenzbedingung (3) ist somit auch befriedigt.

Es stellt demnach die Gleichung (8) das gesuchte Integral der partiellen Differentialgleichung (1) dar und gibt das Gesetz an, nach welchem die Temperaturen in der Platte mit der Tiefe x und der Zeit t variieren.

Ziehen wir die Temperaturänderungen in Betracht, welche während des kurzen Zeitintervalles τ in der Tiefe x stattfinden, so können während dieses Intervalles die Größen:

$$A\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0) = m \tag{9}$$

und a als konstant angenommen werden, da sich m und a mit der Zeit langsam ändern. Die mittlere Temperatur u_τ des Intervalles τ ist dann:

$$u_\tau = \frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t-\frac{\tau}{2}} u\,dt$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (8) und die vorstehenden Bezeichnungen:

$$u_\tau = u_0 + m + \frac{x}{h}[v_0 - u_0 - m] + \frac{a}{\tau}e^{-\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}}\cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\Big)dt.$$

Da aber

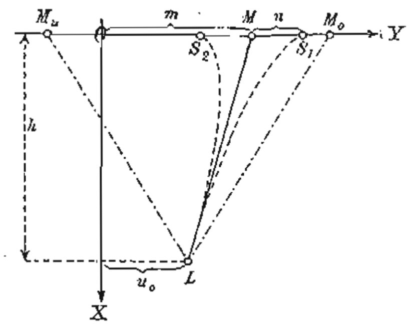
$$\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}}\cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\Big)dt = 0$$

ist, so ist die mittlere Temperatur des Intervalles τ in der Tiefe x gegeben durch die Gleichung:

$$u_\tau = u_0 + m + \frac{v_0 - u_0 - m}{h}x, \tag{10}$$

welche besagt, daß sich die mittleren Temperaturen u_τ mit der Tiefe x linear ändern.

Tragen wir demnach in einem orthogonalen Koordinatensystem als Abszissen die Tiefen x und als Ordinaten die entsprechenden mittleren Temperaturen u_τ auf, so stellt uns die Gerade ML die Abhängigkeit der mittleren Temperaturen von der Tiefe x während eines gewählten Intervalles τ dar. Die Ordinate des Punktes M ist $(u_0 + m)$, die Abszisse des Punktes L ist h und seine Ordinate v_0.



Der Gleichung (8) kann mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) und (10) folgende Form gegeben werden:

$$u = u_\tau + a e^{-\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}\cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\Big). \tag{11}$$

Während des betrachteten Intervalles τ oszillieren demnach die Temperaturen u um ihre Mittelwerte u_τ, welche durch die Ordinaten der Geraden ML dargestellt sind. Die Amplituden dieser Oszillationen sind:

$$\pm a e^{-\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}},$$

sie nehmen also mit der Tiefe x ab. Auf der oberen Begrenzungsebene der Platte ist der Wert der Amplitude gleich a, auf der unteren ist diese Amplitude verschwindend klein.

Die Kurven $S_1 L$ und $S_2 L$, deren Entfernungen in der Richtung Y von der Geraden ML gleich

$$+\,a\,e^{-\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

$$-\,a\,e^{-\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

sind und welche sich dem Punkte L unendlich nähern, geben die Grenzen an, zwischen welchen die Temperaturen während des Intervalles τ schwanken. Während des großen Zeitintervalles T oszilliert der Punkt M langsam zwischen den Lagen M_u und M_0, welche den mittleren Temperaturen des kältesten, bzw. des wärmsten Zeitintervalles τ entspricht. Der Punkt L ist unbeweglich.

Zur Theorie des solaren Klimas.

Denken wir uns die Atmosphäre der Erde weggeschafft und die Oberfläche der Erde überall erstarrt, so wird die Temperatur eines beliebigen Punktes der Oberfläche die Funktion folgender dreier Einflüsse sein: 1. der Sonnenstrahlung, die wir kurz Insolation nennen werden, und durch welche täglich gewisse Wärmemengen der in Betracht gezogenen Stelle zugeführt werden, 2. der Ausstrahlung in den interplanetarischen Raum, welche wir kurz Radiation nennen werden, und durch welche fortwährend eine Abfuhr der Wärmemengen von der Erdoberfläche gegen den interplanetarischen Raum bewirkt wird, 3. der Wärmeleitung, welche wir kurz Konduktion nennen werden, und durch welche nach dem Vorhergehenden eine Wärmeabfuhr von der Erdoberfläche gegen das Erdinnere oder auch umgekehrt hervorgerufen wird.

Untersuchen wir diese Einflüsse gesondert und bestimmen wir jene Wärmemengen, welche infolge dieser Einflüsse innerhalb eines Zeitintervalles τ von 24 Stunden der Erdoberfläche zu-, bzw. abgeführt werden.

Durch die Insolation wird in der Zeiteinheit der Einheit der Erdoberfläche eine Wärmemenge zugeführt, welche — wenn die Exzentrizität der Erdbahn nicht berücksichtigt wird — durch den Ausdruck:

$$\frac{dq_1}{dt} = A_0 J \cos z \tag{12}$$

dargestellt ist.

Dabei bedeutet z die Zenitdistanz der Sonne, A_0 das Absorptionsvermögen der Erdoberfläche und J die Solarkonstante.

A_0 hängt von der Beschaffenheit der Erdoberfläche an der in Betracht gezogenen Stelle ab. Wenn die Erdkruste ein vollkommen schwarzer Körper wäre, so würde $A_0 = 1$ betragen. In Wirklichkeit ist A_0 kleiner als Eins.

J ist eine Wärmemenge, welche der Einheit der vollkommen schwarzen Oberfläche in der Zeiteinheit zugeführt wird, wenn die Sonnenstrahlen auf diese Fläche senkrecht auffallen und wenn sich die Sonne in der mittleren Entfernung befindet. Diese Konstante beträgt nach den neuesten Untersuchungen[1]) 2 Grammkalorien für cm^2 und Minute.

Die Zenitdistanz z der Sonne ist gegeben durch die Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\omega, \tag{13}$$

wo φ die geographische Breite der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche, δ die Deklination der Sonne und ω deren Stundenwinkel bedeutet.

Bezeichnen wir mit t die Sonnenzeit — gezählt von Mittag bis Mittag — und mit τ das Zeitintervall des Sonnentages, so ist:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} t \tag{14}$$

und

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\frac{2\pi}{\tau} t. \tag{15}$$

In der obigen Gleichung ist τ streng genommen nicht konstant, weil die Sonnentage nicht vollkommen gleiche Länge haben, doch ist diese Abweichung geringfügig und kann vernachlässigt werden. Auch kann $\tau = 24^h$ der mittleren Zeit gesetzt werden.

Die Gleichung (12) gilt nur für jene Zeitinterwalle, wo sich die Sonne oberhalb des Horizontes befindet, d. h. nur für

$$z \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Sobald die Sonne untergeht, hört die Insolation vollkommen auf. Infolgedessen wird die Wärmemenge Δq_1, welche während des Zeitintervalles τ der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche zugeführt wird, gleich sein:

$$\Delta q_1 = \int_{-\frac{\Theta}{2}}^{+\frac{\Theta}{2}} dq_1, \tag{16}$$

wo Θ die Länge des Tagbogens der Sonne oder die Länge des Tages bedeutet. Diese Größe wird aus der Gleichung (15) bestimmt, wenn man in dieselbe einsetzt:

$$t = \frac{\Theta}{2}, \quad z = \frac{\pi}{2}.$$

1) Siehe **Trabert**, Lehrbuch der kosmischen Physik, Leipzig 1911, S. 444

Auf diese Weise erhalten wir

$$\sin\varphi\,\sin\delta+\cos\varphi\,\cos\delta\,\cos\frac{\pi}{\tau}\,\Theta=0,$$

woraus

(17) $$\cos\frac{\pi}{\tau}\,\Theta=-\operatorname{tang}\varphi\,\operatorname{tang}\delta.$$

Aus den Gleichungen (12), (15) und (16) folgt dann:

$$\Delta q_1=A_0 I\int\limits_{-\frac{\Theta}{2}}^{+\frac{\Theta}{2}}\left(\sin\varphi\,\sin\delta+\cos\varphi\,\cos\delta\,\cos\frac{2\pi}{\tau}t\right)dt.$$

Die Größe φ ist, da wir eine bestimmte Stelle der Erdoberfläche ins Auge fassen, konstant; auch kann die Deklination δ der Sonne während des Intervalles τ als konstant angesehen werden, da ihre maximale Änderung während dieses Intervalles nur $0\cdot 0064$ beträgt. Es ist deshalb:

(18) $$\Delta q_1=A_0 I\left\{\Theta\sin\varphi\,\sin\delta+\frac{\tau}{\pi}\cos\varphi\,\cos\delta\,\sin\frac{\pi}{\tau}\,\Theta\right\}.$$

Die Größe Δq_1 ist also als Funktion der Deklination der Sonne und der Tageslänge somit auch als Funktion des Datums dargestellt.

Wenden wir uns nun der Bestimmung der Wärmemenge Δq_t zu, welche innerhalb des Zeitintervalles τ infolge der Radiation von der Erdoberfläche abgeführt wird.

Nach den Untersuchungen von Paschen[1]) ist die in der Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmemenge gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{dq_2}{dt}=cT^\varepsilon,$$

wo T die absolute Temperatur des ausstrahlenden Körpers, c und ε zwei Konstanten bezeichnen, welche von der Natur dieses Körpers und dessen Oberfläche abhängen. Wenn dieser Körper vollkommen schwarz wäre und wir die Zeit in Minuten, die Flächen in cm² messen würden, so hätte man für $\varepsilon=4$ und für $c=0\cdot 768\times 10^{-10}$, d. h. die Ausstrahlung wäre durch das Stefansche Gesetz geregelt. Für einen nicht vollkommen schwarzen Körper ist c stets kleiner als der oben angegebene Wert, während sich ε um so mehr der Zahl 5 nähert, je mehr sich der strahlende Körper von dem absolut schwarzen unterscheidet.

Siegl[2]) hat sowohl für eine Reihe von Gesteinen, als auch für Wasser und Eis die Konstanten c und ε bestimmt, so daß gerade für

1) Paschen, Über die Gesamtemission glühenden Platins, Wied. Ann. 49. Über die Gesetzmäßigkeiten in den Spektren fester Körper, ebenda 58 und 60.

2) Siegl, Über das Emissionsvermögen von Gesteinen, Wasser und Eis, Wiener Sitzungsber. Math.-naturw. Klasse Bd. CXVI.

den behandelten Fall ausreichendes Beobachtungsmaterial zur Verfügung steht.

Um die Wärmemenge Δq_2 zu bestimmen, nehmen wir — dem Beispiel Traberts folgend — die Temperatur der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche während des Zeitintervalles τ als konstant und gleich der mittleren täglichen Temperatur u_τ des betreffenden Tages an. Dann ist:

(19) $$\Delta q_2=c(273+u_\tau)^\varepsilon\tau,$$

wo u_τ in Celsiusgraden zu nehmen ist:

Es erübrigt uns noch jene Wärmemenge Δq_3 zu bestimmen, welche während des Zeitintervalles τ der Erdoberfläche durch Konduktion aus der Erdkruste zugeführt wird. Wie wir bereits in der Einleitung dargetan haben, braucht bei dieser Untersuchung nur eine Schichte der Erdkruste von der Dicke h gleich rund 10 m in Betracht gezogen zu werden, da deren untere Begrenzungsfläche eine von der Zeit unabhängige Temperatur v_0 aufweist, welche sich wenig von der mittleren Jahrestemperatur der Oberfläche unterscheidet. Die Oberfläche dieser Schichte ist periodischen Temperaturänderungen unterworfen, welche einen doppelt oszillatorischen Charakter haben, indem sie durch Superposition der täglichen und jährlichen Änderungen entstehen. Die Periode T der jährlichen Änderungen, das Jahr, ist viel größer als die Periode τ der täglichen Änderungen, so daß der Quotient $\frac{\tau}{T}=0\cdot 0027$ eine kleine Zahl ist. Es kann — wie dies öfters geschehen ist — angenommen werden, daß diese Änderungen harmonisch sind, d. h. es kann die Temperatur u der Erdoberfläche an einer gegebenen Stelle als eine Funktion der Zeit t von folgender Form dargestellt werden:

(20) $$u=u_0+A\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0)+a\cos\frac{2\pi}{\tau}t.$$

A ist die Amplitude der jährlichen, a die Amplitude der täglichen Schwankungen. A ist konstant, weil nach einem Jahre dieselben die Temperatur der Oberfläche bestimmenden Verhältnisse wiederkehren; a ändert sich im allgemeinen von Tag zu Tag, doch erfolgen diese Änderungen so langsam, daß der Quotient $\frac{da}{dt}$ eine kleine Zahl ist.

Hinsichtlich der Größe u_0 ist folgendes zu bemerken: Die mittlere Jahrestemperatur u_τ der Oberfläche ist gleich

$$u_\tau=\frac{1}{T}\int\limits_0^{\tau}u\,dt=u_0+\frac{A}{T}\int\limits_0^{T}\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\,dt+\frac{a}{T}\int\limits_0^{T}\cos\frac{2\pi}{\tau}t\,dt.$$

Da aber
$$\int_0^T \cos\frac{2\pi}{\tau}(t-t_0)\,dt = 0$$
und
$$\tau = \frac{\tau}{n},$$
wo n eine ganze Zahl (365 oder 366) ist, so ist auch
$$\int_0^T \cos\frac{2\pi}{\tau}t\,dt = \int_0^T \cos\frac{a n\pi}{T}t\,dt = 0,$$
und demnach
$$u_T = u_0,$$
u_0 bedeutet also die mittlere Jahrestemperatur der Erdoberfläche an der in Betracht gezogenen Stelle.

Der betrachtete Teil der sphäroidischen Schichte der Erdkruste hat einen sehr großen Radius und kann deshalb durch eine Platte ersetzt werden, so daß die Wärmebewegung in diesem Teile der Fourierschen Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{21}$$

gehorchen wird. Die Dicke h der betrachteten Schicht ist so gewählt, daß in der Tiefe $x = h$ die Temperaturänderungen der Oberfläche nicht fühlbar sind, und es ist deshalb $e^{-\frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$ eine kleine Zahl. Die Temperaturänderungen in der betrachteten Schicht werden durch das partikuläre Integral der Gleichung (21) dargestellt sein, welches folgenden Grenzbedingungen Genüge leistet.

Für $x = 0$
$$u = u_0 + A\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0) + a\cos\frac{2\pi}{\tau}t$$
und für $x = h$
$$u = u_0.$$
Dabei sind die Größen
$$\frac{\tau}{T},\quad \frac{da}{dt},\quad e^{-\frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$
sehr klein.

Das zu lösende Problem ist identisch mit dem eingangs behandelten Problem der Wärmeleitung, und es wird demnach die Temperatur u in der Tiefe x und zur Zeit t durch die Gleichung (8) dargestellt sein, welche wir hier wiedergeben:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + A\cos\frac{2\pi}{\tau}(t-t_0) + \frac{x}{h}\left[v_0 - u_0 - A\cos\frac{2\pi}{\tau}(t-t_0)\right] \\ &\quad + a e^{\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Die Wärmemenge $\frac{dq_3}{dt}$, welche in der Zeiteinheit der Flächeneinheit der Oberfläche durch Konduktion zugeführt wird, ist nach den Grundannahmen der Fourierschen Theorie proportional dem Temperaturgefälle und gleich:

$$\frac{dq_3}{dt} = K\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=0}. \tag{23}$$

Aus der Gleichung (22) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{v_0-u_0}{h} - \frac{A}{h}\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0) \\ &\quad + \frac{a}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\,e^{-\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \frac{x}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=0} = \frac{v_0-u_0}{h} - \frac{A}{h}\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0) + \frac{a}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\left\{\sin\frac{2\pi}{\tau}t - \cos\frac{2\pi}{\tau}t\right\}. \tag{24}$$

Im Zeitintervalle t bis $t+\tau$ wird der Oberfläche die Wärmemenge Δq_3 zugeführt, welche gleich ist:

$$\Delta q_3 = \int_t^{t+\tau} dq_3 \tag{25}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (23) und (24):

$$\begin{aligned} \Delta q_3 &= K\frac{v_0-u_0}{h}\tau - K\frac{A}{h}\int_t^{t+\tau}\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\,dt \\ &\quad + a\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\int_t^{t+\tau}\sin\frac{2\pi}{\tau}t\,dt - \int_t^{t+\tau}\cos\frac{2\pi}{\tau}t\,dt. \end{aligned}$$

Die letzten zwei Integrale der vorstehenden Gleichung verschwinden und es ist

$$\Delta q_3 = K\frac{v_0-u_0}{h}\tau - K\frac{A}{h}\int_t^{t+\tau}\cos\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\,dt. \tag{26}$$

Bezeichnen wir wie früher mit u_τ die mittlere Temperatur an der Oberfläche während des in Betracht gezogenen Tages, so ist:

$$u_\tau \tau = \int_t^{t+\tau} u\,dt$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (20)

$$u_\tau \tau = u_0 \tau + A \int_t^{t+\tau} \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0)\, dt + a \int_t^{t+\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau}(t - t_0)\, dt.$$

Das letzte Integral der vorstehenden Gleichung verschwindet, und es kann demnach der Gleichung (26) folgende Form gegeben werden:

$$(27) \qquad \Delta q_3 = K \frac{v_0 - u_\tau}{h} \tau.$$

Nachdem nun die Wärmemengen Δq_1, Δq_2 und Δq_3 berechnet worden sind, kann zur Bestimmung der mittleren Temperatur des Zeitintervalles τ, d. h. der mittleren Temperatur eines beliebigen Tages, geschritten werden. Auf der Oberfläche der Erde wird sich jene Temperatur einstellen, für welche die zugeführten Wärmemengen gleich den abgeführten sind. Zugeführt wurden die Wärmemengen Δq_1 und Δq_3, abgeführt die Wärmemenge Δq_2. Die Temperatur u_τ wird man demnach aus der folgenden Gleichung bestimmen:

$$(28) \qquad \Delta q_1 + \Delta q_3 = \Delta q_2.$$

Setzen wir in die obige Gleichung die Werte für Δq_1, Δq_2 und Δq_3 aus den Gleichungen (18), (19) und (27) ein, so erhalten wir:

$$A_0 I \left\{ \Theta \sin\varphi \sin\delta + \frac{\tau}{\pi} \cos\varphi \cos\delta \sin\frac{\pi}{\tau}\Theta \right\} - c(273 + u_\tau)^\epsilon \tau + \frac{K}{h}(v_0 - u_\tau)\tau = 0.$$

Bezeichnen wir

$$(29) \qquad \frac{\Theta}{\tau} = \lambda,$$

wo demnach λ das Verhältnis des Tagbogens der Sonne zum Bogen von 360^0 bedeutet, so bekommt die vorstehende Gleichung die Form

$$(30) \qquad c(273 + u_\tau)^\epsilon + \frac{K}{h}(u_\tau - v_0) = A_0 I \left\{ \lambda \sin\varphi \sin\delta + \frac{1}{\pi} \cos\varphi \cos\delta \sin\lambda\pi \right\}.$$

In dieser Gleichung sind für einen gegebenen Tag alle Größen bis auf die Größen u_τ und v_0 bekannt. Hinsichtlich der Größe v_0 kann folgendes bemerkt werden. Diese kann mit großer Annäherung der mittleren Jahrestemperatur u_0 gleichgesetzt werden.

Die Temperatur u_0 wird auf folgende Art berechnet: Der wärmste Tag der Oberfläche ist nach Gleichung (20) der Tag, für welchen:

$$\cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) = 1$$

d. h.

$$t = t_0 = n_1 \tau.$$

Während dieses Tages kann die Temperatur der Oberfläche durch die Gleichung dargestellt werden:

$$u_1 = u_0 + A + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t.$$

und es ist die mittlere Temperatur des wärmsten Tages

$$\max u_\tau = \frac{1}{\tau} \int_{n_1\tau - \frac{\tau}{2}}^{n_1\tau + \frac{\tau}{2}} u_1 = u_0 + A.$$

Auf dieselbe Art bekommt man die mittlere Temperatur des kältesten Tages:

$$\min u_\tau = u_0 - A,$$

und es ist demnach in erster Annäherung:

$$u_0 = \frac{1}{2}(\max u_\tau + \min u_\tau).$$

Mit einem angenommenen Werte für $v_0 = u_0$ werden mit Hilfe der Gleichung (30) die mittleren Temperaturen des wärmsten und des kältesten Tages an der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche bestimmt. Diese Tage treten an der nördlichen Hemisphäre für Orte, wo $\varphi > 23^0 30'$ ein, wenn $\delta = 23^0 30'$ bzw. $\delta = -23^0 30'$ beträgt. Das arithmetische Mittel der berechneten Temperaturen gibt einen besseren Wert für u_0, mit welchem die Rechnung wiederholt werden kann. Dann kann man mit Hilfe der Gleichung (30) die mittleren Temperaturen für eine größere Anzahl der über das Jahr gleichmäßig verteilten Tage berechnen, um daraus mit einer noch größeren Genauigkeit die mittlere Jahrestemperatur u_0 zu bestimmen.

Nachdem diese Berechnung durchgeführt worden ist, sind in der Gleichung (30) alle Größen bis auf die Größe u_τ bekannt. Diese Gleichung gestattet uns demnach die mittlere Temparatur u_τ eines beliebigen Tages im Jahre zu bestimmen, löst somit die Aufgabe, welche wir uns gestellt haben.

Belgrad, 20. März 1912.