Sonderabdruck aus Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 58. Band. 1910. Heft 1/2.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Zur Statik der massiven Widerlager.

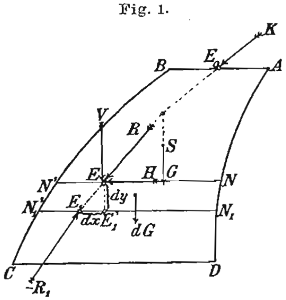
Von Dr. M. Milankovitch in Wien.

Wir wollen in dieser Abhandlung drei verschiedene Formen der massiven Widerlager entwickeln, die gewissen, von vornherein gestellten Forderungen in allen ihren Teilen vollkommen entsprechen und als die *theoretisch günstigsten Formen* bezeichnet werden können.

Bevor wir zur Behandlung dieser drei Probleme schreiten, wollen wir folgende allgemeinere Betrachtungen vorausschicken:

Es sei in der Fig. 1 ein Widerlager $ABCD$ dargestellt. Dasselbe habe eine prismatische Form, seine Erzeugenden seien senkrecht zur Bildebene, die Leitlinien AND und $BN'C$ stetige Kurven (Begrenzungskurven). Die Tiefe des betrachteten Teiles des Widerlagers — senkrecht zur Bildebene gemessen — sei gleich der Einheit. Auf diesen Teil des Widerlagers wirke im Punkte E_0 der schief gerichtete Druck K. Auf den durch eine etwaige Hinterfüllung des Rückens BC des Widerlagers hervorgerufenen Erddruck soll hier keine Rücksicht genommen werden, da derselbe vom Feuchtigkeitsgrad der Hinterfüllung abhängig ist und bei Vornahme von Reparaturen am Widerlager gänzlich verschwinden kann. Dann wirken auf das Widerlager zwei Arten von Kräften: der schief gerichtete Druck K und das vertikal wirkende Eigengewicht des Widerlagers selbst. Die Fugen des Mauerwerks nehmen wir horizontal an, da dieselben bei den praktischen Ausführungen in Ziegel und Stein tatsächlich so ausgeführt werden und bei Ausführungen in Beton die Arbeitsgrenzen eine horizontale Lage besitzen. So wirkt dann auf eine beliebige horizontale Fuge NN' die Druckkraft R, welche sich als die Resultante des Druckes K und des Eigengewichtes G des oberhalb dieser Fuge befindlichen Widerlagerteiles $NABN'$ darstellt. Der Angriffspunkt E dieser Kraft wird der Druckmittelpunkt der Fuge NN' und der geometrische Ort der Druckmittelpunkte der horizontalen Fugen die Druckkurve genannt. Die der Fuge NN' unendlich benachbarte Fuge sei N_1N_1', ihr Druckmittelpunkt sei E_1 und ihre Druckkraft R_1. Legen wir in der Kraftebene ein orthogonales Koordinatensystem mit einer horizontalen Abszissenachse

Fig. 1.



und einer vertikalen Ordinatenachse und bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes E mit x und y, so ist:

$$\overline{E_1'E_1} = dx \quad \overline{EE_1'} = dy.$$

Bezeichnen wir noch das spezifische Gewicht des Widerlagermaterials mit g, so können folgende Erwägungen angestellt werden:

Auf das unendlich schmale Körperelement $NN'N_1'N_1$ wirken folgende Kräfte:

1. die Druckkraft R der Fuge NN', welche aus den Kräften K und G hervorgeht und welche wir in die orthogonalen Komponenten V und H zerlegt denken;

2. die negativ genommene Druckkraft R_1 der Fuge N_1N_1';

3. das Eigengewicht dG des unendlich schmalen Körperelementes $NN'N_1'N_1$, welches in der Halbierungslinie der Länge NN' wirkend anzunehmen ist.

Die ersten drei dieser Kräfte sind endlich, die dritte Kraft dG verschwindet mit dx und ist von derselben Kleinheitsordnung wie dx.

Die Summe der statischen Momente dieser drei Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes der Kraftebene muß, wegen des notwendigen Gleichgewichtes, gleich Null sein. Wählt man somit den Punkt E_1 zum Momentenpunkt und bezeichnet das Moment der Kraft dG bezüglich dieses Punktes mit M_g (positiv, wenn im Sinne des Uhrzeigers drehend), so besteht die Gleichung:

$$V dx - H dy + M_g = 0. \tag{1}$$

In dieser Gleichung sind alle drei Glieder von derselben Kleinheitsordnung. In den ersten zwei Gliedern ist die Kraft endlich, der Arm unendlich klein, im dritten Glied ist die Kraft unendlich klein, der Arm dagegen endlich.

Die Momentengleichung (1) wird der Ausgangspunkt unserer Untersuchungen sein. Vorher sei jedoch der praktische Zweck der zu behandelnden Probleme in Kürze erläutert.

Von der Lage des Druckmittelpunktes in der Fuge hängt auch die Normalspannungverteilung längs der Fuge ab. Fällt der Druckmittelpunkt mit der Mitte der Fuge zusammen, so wird die Fuge in allen ihren Punkten gleiche Normalspannungen aufweisen; im anderen Falle erfolgt die Spannungsverteilung entsprechend der Navierschen Annahme nach einer zur Fuge geneigten Geraden. Liegt der Druckmittelpunkt im mittleren Drittel der Fuge, so wird dieselbe nur Druckspannungen aufzunehmen haben, fällt dagegen der Druckmittelpunkt außerhalb des mittleren Drittels der Fuge, so ist dieselbe auch auf Zug beansprucht. Die Materialien, aus welchen die Widerlager hergestellt werden, sind in der Regel gegen Zug nicht widerstandsfähig, und es ist die Aufgabe der Konstrukteure, das Auftreten der Zugspannungen zu verhindern. Zu diesem Ende genügt es — wie aus dem Vorhergehenden folgt — daß der Druckmittelpunkt im mittleren Drittel — Kern — der Fuge liege. Die Sonderfälle jedoch, wo der Druckmittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Fuge oder ihrem Drittelpunkte — Kernpunkte — zusammenfällt, sind, da der erste Fall eine gleichmäßige Beanspruchung der Fuge, der zweite eine größtmögliche Ersparnis an Material ergibt, von besonderer Wichtigkeit, und mit diesen wollen wir uns hier beschäftigen.

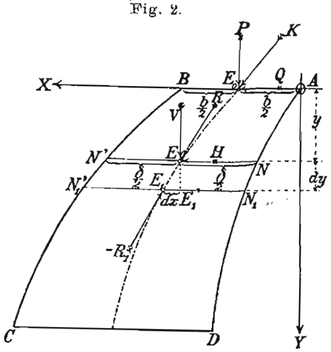
Unsere Aufgabe wird demnach vor allem sein, die Form des Widerlagers abzuleiten, welches die Eigenschaft hat, daß es in allen seinen Teilen gleich gedrückt ist und in die Kategorie der *Körper gleichen Widerstandes gehört*, welche als die vollkommensten Konstruktionen bezeichnet werden können. Es wird sich zeigen, daß ein solches Widerlager gekrümmte Begrenzungskurven AD und BC besitzt. In der Praxis wird jedoch oft die Forderung gestellt, daß die vordere Begrenzungskurve AD eine vertikale Gerade sei und diese Forderung berücksichtigend, werden wir auch die Form des Widerlagers ableiten, dessen vordere Begrenzungslinie eine vertikale Gerade ist, dessen Druckkurve aber auch durch die Fugenmitten hindurchgeht und auf diese Weise eine gleichmäßige Spannungsverteilung längs der Fuge hervorruft. Dieser zweite Fall hat mehr ein theoretisches Interesse als praktische Bedeutung, weil diese Form des Widerlagers unökonomisch ist. Für den Fall einer vertikalen vorderen Begrenzungslinie bekommt man — falls keine Zugspannungen zugelassen werden sollen — die ökonomischste Form des Widerlagers, wenn man die Druckkurve mit den Drittelpunkten der Fugen zusammenfallen läßt, da in diesem Falle gerade noch keine Zugspannungen im Widerlager auftreten. Mit diesem Falle werden wir uns deshalb auch befassen und die betreffende Form des Widerlagers ableiten.

Das Profil des Widerlagers gleichen Widerstandes.

Es sei in Fig. 2 das Widerlagerprofil $ABCD$ dargestellt. Dasselbe sei im Mittelpunkte E_0 der Krone AB mit dem schiefen Druck K belastet, dessen wagerechte und senkrechte Komponenten die Kräfte Q und P sind. Wenn das Widerlager in allen Punkten seiner horizontalen Fugenschnitte gleich stark gedrückt sein soll, so muß offenbar seine

Druckkurve E_0EE_1 mit dem geometrischen Ort der Fugen zusammenfallen, und es muß außerdem die Breite δ einer beliebigen Fuge proportional sein der Normalkraft V derselben.

Fig. 2.



Die eingangs entwickelte Momentengleichung (1) wird demnach in diesem Falle lauten:

(2) $$Vdx - Hdy = 0,$$

da das Glied M_g als eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung verschwindet.

Es soll aber außerdem die Beziehung bestehen:

(3) $$\delta = kV,$$

wo k eine Konstante bedeutet.

Die horizontale Komponente H der Druckkraft R ist offenbar gleich der horizontalen Komponente der Kraft K, da auf den Widerlagerteil $ABN'N$ sonst keine weitere horizontale Kraft wirkt.

(4) $$H = Q.$$

Die vertikale Komponente V der Druckkraft R ist, wie leicht einzusehen:

(5) $$V = P + g\int_0^y \delta\, dy,$$

und es ist mit Rücksicht auf (3)

$$\frac{\delta}{k} = P + g\int_0^y \delta\, dy.$$

Die Differentiation der vorstehenden Gleichung nach y ergibt:

$$\frac{1}{k}\frac{d\delta}{dy} = g\delta$$

oder

$$\frac{d\delta}{\delta} = kg\,dy,$$

woraus durch Integration — unter Berücksichtigung, daß für $y = 0$, $\delta = b$ — die Gleichung folgt:

(6) $$\delta = b e^{kgy}.$$

Diese Gleichung gibt uns das Gesetz an, nach welchem die Fugenbreite δ nach unten hin zunehmen soll.

Die Gleichungen (2), (4), (5) und (6) ergeben die Beziehung:

$$P + gb\int_0^y e^{kgy}\, dy = Q\frac{dy}{dx}$$

oder

$$P + \frac{b}{k}\, e^{kgy} = Q\frac{dy}{dx},$$

woraus:

(7) $$x = kQ\int\frac{dy}{kP + be^{kgy}} + C.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen kann wie folgt transformiert werden:

$$\frac{1}{kP+be^{kgy}} = \frac{1}{kP}\cdot\frac{kP+be^{kgy}-be^{kgy}}{kP+be^{kgy}} = \frac{1}{kP}\left\{1-\frac{be^{kgy}}{kP+be^{kgy}}\right\} =$$
$$= \frac{1}{k^2gP}\left\{kg-\frac{kgbe^{kgy}}{kP+be^{kgy}}\right\}.$$

Das unbestimmte Integral der Gleichung (7) lautet also:

(7) $$x = \frac{Q}{kgP}\left\{kgy - \log_{\text{nat}}(kP+be^{kgy})\right\} + C.$$

Da jedoch für $y = 0$ $x = \frac{b}{2}$, so ist:

$$C = \frac{b}{2} + \frac{Q}{kgP}\log_{\text{nat}}(kP+b),$$

worauf aus (7) folgt:

(8) $$x = \frac{b}{2} + \frac{Q}{kgP}\left\{kgy - \log_{\text{nat}}\frac{kP+be^{kgy}}{kP-b}\right\}.$$

Dies ist die Gleichung der Mittellinie des Widerlagerprofiles. Durch die Gleichungen (6) und (8) ist das Profil des Widerlagers gleichen Widerstandes vollkommen bestimmt.[1])

Wenn $Q = 0$, so lautet die Gleichung der Mittellinie der Profiles $x = \frac{b}{2}$, während das Gesetz der Zunahme der Fugenbreite unverändert bleibt. Diese spezielle Form des Widerlagers ist in der technischen Mechanik unter der Bezeichnung „logistischer Körper“ bekannt.

Das Profil des Widerlagers, dessen vordere Begrenzungslinie eine Gerade ist und dessen Druckkurve durch die Fugenmittelpunkte hindurchgeht.

In der Fig. 3 sei dieser Fall dargestellt. Es ist nun unsere Aufgabe, die Form des Profiles zu bestimmen. Zu diesem Ende wollen

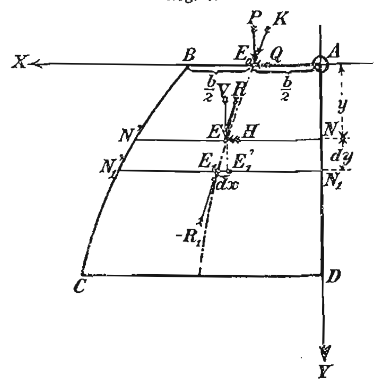
1) Mit dem soeben behandelten Problem befaßte sich auch Resal in seiner Stabilité des constructions, Paris 1901 (S. 548 ff.), doch sind seine Ableitungen fehlerhaft, wie wir dies in unserer Abhandlung „Theorie der Druckkurven“, diese Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 55, nachgewiesen haben. Um Wiederholungen zu vermeiden, verweisen wir auf diese Abhandlung.

wir die Gleichung der Druckkurve ableiten, welche als die Mittellinie des Profiles dasselbe vollkommen bestimmt. Die Momentengleichung (1) lautet im vorliegenden Falle:

$$V\,dx - Q\,dy = 0,$$

da wie früher $H = Q$ und das Glied M_g eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ist. Es ist auch, wie leicht einzusehen:

Fig. 3.



(9) $$V = P + 2g\int_0^y dxy,$$

so daß:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q} + \frac{2g}{Q}\int_0^y x\,dy.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach x bekommt man:

(10) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2g}{Q}\,x\,\frac{dy}{dx}.$$

Eine einmalige Integration dieser Gleichung ergibt die Beziehung:

(11) $$\frac{dy}{dx} = Ce^{\frac{g}{Q}x^2},$$

wo C noch eine willkürliche Konstante bedeutet, welche wie folgt bestimmt wird: Die Beziehung $\frac{dy}{dx} = \frac{V}{Q}$ besagt, daß die Druckkraft R die Druckkurve berührt, und es ist deshalb:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right\}_{y=0} = \frac{P}{Q}.$$

Es ist somit:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right\}_{\substack{x=\frac{b}{2}\\ y=0}} = \frac{P}{Q} = Ce^{\frac{g}{Q}\cdot\frac{b^2}{4}},$$

woraus

$$C = \frac{P}{Q}e^{-\frac{g}{Q}\cdot\frac{b^2}{4}}.$$

Es ist also

(12) $$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}\cdot e^{-\frac{g}{Q}\frac{b^2}{4}}\cdot e^{\frac{g}{Q}x^2}$$

und

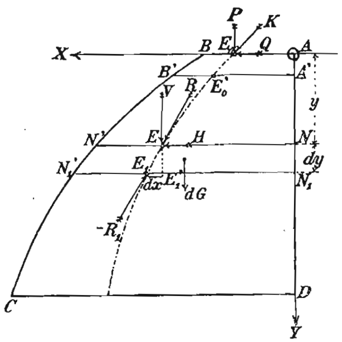
(13) $$y = \frac{P}{Q}e^{-\frac{g}{Q}\cdot\frac{b^2}{4}}\int e^{\frac{g}{Q}x^2}\cdot dx.$$

Dies ist die Gleichung der Druckkurve. Das vorstehende Integral kann nicht in endlicher Form entwickelt werden, doch hat Stieltjes Methoden angegeben, wie dasselbe berechnet werden kann.[1])

Das Profil des Widerlagers, dessen vordere Begrenzungslinie eine vertikale Gerade ist und dessen Druckkurve durch die Drittelpunkte der Fugen hindurchgeht.

Dieser Fall, bei welchem also gerade noch keine Zugspannungen auftreten, sei in der Fig. 4 dargestellt. Es ist auch hier wie früher $H = Q$. Das Glied M_g der Momentengleichung (1) wird gegen die anderen Glieder der Gleichung nicht mehr verschwinden, da die Entfernung der Kraft dG vom Momentenpunkte E_1 endlich ist. Wegen der unendlichen Annäherung des Punktes E_1 an den Punkt E und der endlichen Entfernung der Kraft dG von diesen Punkten ist die Entfernung der Kraft dG von E_1 gleich ihrer Entfernung vom Punkte E und diese ist, wie sofort einzusehen, gleich $\frac{x}{4}$.

Fig. 4.



Es ist demnach

$$(14)\qquad Mg = \frac{x}{4}\,dG = \frac{x}{4}\cdot\frac{3}{2}\,xg\,dy = \frac{3}{8}\,gx^2\,dy,$$

und die Momentengleichung (1) lautet im vorliegenden Falle

$$(15)\qquad V\,dx - Q\,dy + \tfrac{3}{8}\,gx^2\,dy = 0,$$

und da

$$V = P + \tfrac{3}{2}\,g\int_0^x x\,dy,$$

so ist

$$(16)\qquad P + \tfrac{3}{2}\,g\int_0^x x\,dy - Q\frac{dy}{dx} + \tfrac{3}{8}\,gx^2\frac{dy}{dx} = 0.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach x gelangt man zur Gleichung:

$$(17)\qquad \left(\tfrac{3}{8}\,gx^2 - Q\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \tfrac{9}{4}\,gx\frac{dy}{dx} = 0$$

oder

$$(18)\qquad \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{18\,gx}{3\,gx^2 - 8\,Q}\,dx,$$

1) Siehe Acta mathematica Bd. 9, 1886.

woraus durch Integration die Gleichung folgt:

$$(19)\qquad \frac{dy}{dx} = C(3\,gx^2 - 8\,Q)^{-3}.$$

Für das Gleichgewicht des obersten Elementes gilt die Momentengleichung bezüglich E_0':

$$P\,dx - Q\,dy + \tfrac{3}{8}\,gx_0^2\,dy = 0,$$

woraus:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right\}_{x=x_0} = -\frac{8\,P}{3\,gx_0^2 - 8\,Q}.$$

Es ist mit Rücksicht auf die Gleichung (19):

$$-\frac{8\,P}{3\,gx_0 - 8\,Q} = C(3\,gx_0^2 - 8\,Q)^{-3},$$

woraus:

$$C = -8\,P(3\,gx_0^2 - 8\,Q)^2.$$

Es ist also:

$$(20)\qquad \frac{dy}{dx} = -8\,P(3\,gx_0^2 - 8\,Q)^2(3\,gx^2 - 8\,Q)^{-3}.$$

Wird nun der Einfachheit halber gesetzt:

$$(21)\qquad \frac{8\,Q}{3\,g} = k^2,$$

so ist:

$$(22)\qquad y = -\frac{8}{3}\,\frac{P}{g}\,(x_0^2 - k^2)^2\int\frac{dx}{(x^2 - k^2)^3}.$$

Die zu integrierende Funktion kann in folgende Partialbrüche zerlegt werden:

$$\frac{1}{(x^2 - k^2)^3} = \frac{1}{8\,k^3}\cdot\frac{1}{(x-k)^3} - \frac{3}{16\,k^4}\cdot\frac{1}{(x-k)^2} + \frac{3}{16\,k^5}\cdot\frac{1}{x-k} - \frac{1}{8\,k^3}\cdot\frac{1}{(x+k)^3} - \frac{3}{16\,k^4}\cdot\frac{1}{(x+k)^2} - \frac{3}{16\,k^5}\cdot\frac{1}{x+k}.$$

Berücksichtigt man, daß für $x = x_0$, $y = 0$, so folgt durch Integration der Gleichung (22):

$$(23)\qquad y = \frac{2}{3}\,\frac{P}{k^2 g}\,(x_0^2 - k^2)^2\left\{\frac{x}{(x^2 - k^2)^2} - \frac{x_0}{(x_0^2 - k^2)^2} - \frac{3}{2\,k^2}\left[\frac{x}{x^2 - k^2} - \frac{x_0}{x_0^2 - k^2}\right] - \frac{3}{4\,k^3}\log_{\mathrm{nat}}\frac{(x-k)(x_0+k)}{(x+k)(x_0-k)}\right\}.$$

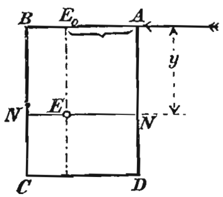
Dies ist die Gleichung der Druckkurve $E_0 E E_1 E_1'$ und ist durch dieselbe das Widerlagerprofil vollkommen bestimmt.

Für $x = \pm k$ wird $y = \pm \infty$.

Es sind somit die Geraden $x = k$ und $x = -k$ Asymptoten dieser Kurve.

Die Begrenzungskurve $B N' N_1' C$ entsteht aus der Druckkurve, wenn man deren Abszissen um die Hälfte vergrößert; sie hat demnach auch vertikale Asymptoten und deren Gleichungen sind $x = \frac{3}{2}k$ und $x = -\frac{2}{3}k$.

Fig. 5.



Wird $P = 0$ angenommen, d. h. wirkt auf das Widerlager nur eine horizontale Kraft Q, so kann y nur dann endlich sein, wenn $x_0 = k = \sqrt{\frac{8Q}{3g}}$. In diesem Falle ist die Begrenzungskurve BC eine vertikale Gerade, wie dies durch folgende einfache Überlegungen bewiesen werden soll. In der nebenstehenden Figur sei dieses Profil dargestellt, wo also

$$\overline{AE_0} = \sqrt{\frac{8Q}{3g}}$$

und

$$\overline{AB} = \tfrac{3}{2} AE_0 = \sqrt{\frac{6Q}{g}}$$

ist.

Das Kippmoment bezüglich des Kernpunktes E einer beliebigen Fuge ist dann:

$$M = Q \cdot y - G \cdot \frac{\overline{AB}}{6} = Q \cdot y - \frac{g}{6} \cdot \overline{AB}^2 \cdot y = 0\,.$$

Diese Gleichung ist das Kriterium, daß die Druckkurve durch die Kernpunkte hindurchgeht und das Profil den gestellten Bedingungen entspricht. Eine bemerkenswerte Eigenschaft dieses Spezialfalles ist, daß die Druckkraft der obersten Fuge die Druckkurve unter einem rechten Winkel schneidet.