Verlag von Lehmann & Wentzel (Paul Krebs). — Druck von R. Spies & Co., Wien.

Sonderabdruck aus Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 55. Band. 1907. Heft 1/2.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Theorie der Druckkurven.

Von Dr. M. MILANKOVITCH in Wien.

Erstes Kapitel.

Die Druckkurve, ihre Gleichung und ihre Eigenschaften.

Definition der Druckkurve.

1. Es stelle $ABCD$ (Fig. 2, S. 5) einen Teil eines festen Tragkörpers dar, der sich unter dem Einflusse äußerer Kräfte — Lasten und Stützenwiderstände — und des eigenen Gewichtes im Gleichgewichte befindet.

Wir setzen voraus:

Der Tragkörper sei prismatisch, seine Erzeugenden seien senkrecht zur Bildebene, die Leitlinien $CN_1'N'B$ und DN_1NA stetige Kurven (Begrenzungskurven), der Tragkörper sei homogen und sein spezifisches Gewicht sei g.

Die Tiefe des betrachteten Teiles des Tragkörpers, — senkrecht zur Bildebene gemessen — den wir zwischen zwei zur Bildebene parallelen Ebenen eingeschlossen denken, sei β.

Von den Lasten setzen wir voraus, daß sie alle in der Bildebene wirken, über die Begrenzungskurven kontinuierlich verteilt sind und sich von Punkt zu Punkt stetig ändern.

Anmerkung 1. Ist die Belastung des Tragkörpers keine stetige, so kann derselbe in solche Teile getrennt werden, für welche die gemachten Voraussetzungen gelten.

Denkt man sich nun einen ebenen, zur Bildebene senkrechten Fugenschnitt NN' durch den Tragkörper geführt, entfernt den rechten Teil des so zerschnittenen Tragkörpers und stellt das zerstörte Gleichgewicht durch die Kraft R wieder her, so nennt man die Kraft R die Druckkraft des Fugenschnittes NN' und ihren Angriffspunkt E an dem geführten Fugenschnitte den Druckmittelpunkt des Fugenschnittes NN'.

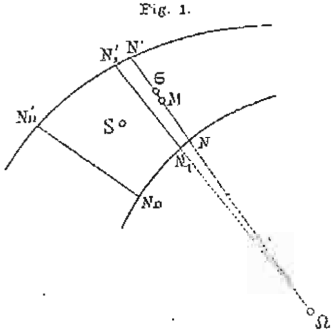
Werden nun nach einem bestimmten Gesetze — nehmen wir an senkrecht zu einer gegebenen Kurve der Bildebene — unendlich viele unendlich nahe ebene Fugenschnitte durch den Tragkörper geführt gedacht, so stellt der geometrische Ort der Druckmittelpunkte dieser Fugenschnitte die Druckkurve im Tragkörper für den gegebenen Belastungsfall und für die gewählte Art der geführten Fugenschnitte dar. Ändert sich das eine oder das andere, so ändert sich damit auch die Druckkurve.

Anmerkung 2. Bei den Stein- und Erdkonstruktionen ruft die Kraft R immer einen Druck hervor und daher die Bezeichnungen: Druckkraft, Druckmittelpunkt und Druckkurve. Ruft die Kraft R einen Zug hervor, so wären die Bezeichnungen: Zugkraft, Zugmittelpunkt und Zugkurve zutreffender. Um aber nicht fortwährend Doppelbezeichnungen anwenden zu müssen, so werden wir nur von Druckkräften, Druckmittelpunkten und Druckkurven sprechen und bemerken hier nur, daß die folgenden Ableitungen Gültigkeit haben auch für den Fall, wo R eine Zugkraft ist.

Allgemeine Gleichung der Druckkurve.

2. *Einleitung.* Wie schon gesagt worden ist und was aus der Definition der Druckkurve durch einfache Überlegungen gefolgert werden kann[1]), ist die Druckkurve abhängig von der Art, wie die Fugenschnitte geführt werden. Als Charakteristik für die Führung der Fugenschnitte diene eine Kurve, zu welcher senkrecht die Fugenschnitte geführt werden. Für horizontale Fugenschnitte geht diese Kurve in eine vertikale Gerade über, für vertikale Fugenschnitte in eine horizontale Gerade. Bei Gewölben, wo die Fugenschnitte senkrecht zur Gewölbsachse gelegt werden sollen, wird diese Kurve mit der Gewölbsachse selbst zusammenfallen. Die Evolute dieser Kurve hat die Eigenschaft, daß sich in ihr je zwei unendlich nahe benachbarte Fugenschnitte schneiden.

Fig. 1.



Für die vollständige Erfassung des Wesens der Druckkurven erscheint es uns notwendig, noch folgende neue Begriffe einzuführen.

Seien NN' und N_nN_n' (Fig. 1) zwei beliebige Fugenschnitte des Tragkörpers. Der Schwerpunkt des zwischen denselben eingeschlossenen Tragkörperteiles $NN'N_n'N_n$ sei S.

Rückt nun der Fugenschnitt N_nN_n' in unendliche Nähe zu NN', so nähert sich auch S einer Grenzlage $\mathfrak{S}$ und diese Grenzlage nennen wir den Schwerpunkt der Fuge NN'.

1) Siehe Föppl, Theorie der Gewölbe § 7.

Die Lage von $\mathfrak{S}$ wird wie folgt bestimmt:

Stellt N_1N_1' den zu NN' unendlich nahen Nachbar-Fugenschnitt, der sich mit NN' in Ω schneidet, M den Mittelpunkt der Länge NN' dar und bezeichnet man

$$\overline{NN'} = \delta \qquad \left(\overline{NM} = \frac{\delta}{2}\right) \qquad \overline{\Omega M} = \varrho,$$

so kann $\mathfrak{S}$ aufgefaßt werden als der Schwerpunkt des unendlich kleinen Viereckes $NN'N_1'N_1$, welches als die Differenz der unendlich kleinen Dreiecke $\Omega N'N_1'$ und ΩNN_1 betrachtet werden kann, deren Flächen wir mit df_1 und df_2 bezeichnen. Es ist klar, daß die Schwerpunkte dieser Dreiecke um $\frac{2}{3}(\varrho + \frac{\delta}{2})$ bezw. um $\frac{2}{3}(\varrho - \frac{\delta}{2})$ von Ω entfernt sind und da die Differenz ihrer statischen Momente bezüglich Ω gleich dem statischen Momente des unendlich kleinen Viereckes $NN'N_1'N_1$ bezüglich Ω sein muß, so ist:

$$(df_1 - df_2)\overline{\Omega\mathfrak{S}} = \tfrac{2}{3}\left(\varrho + \frac{\delta}{2}\right)df_1 - \tfrac{2}{3}\left(\varrho - \frac{\delta}{2}\right)df_2.$$

Man hat ferner

$$df_1 : df_2 = \left(\varrho + \frac{\delta}{2}\right)^2 : \left(\varrho - \frac{\delta}{2}\right)^2,$$

und es folgt aus diesen zwei Gleichungen:

$$\overline{\Omega\mathfrak{S}} = \varrho + \frac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho}$$

$$\overline{M\mathfrak{S}} = \frac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho}.$$

Der Schwerpunkt der Fuge hat also im allgemeinen eine endliche Entfernung von der Fugenmitte und nur für die Fälle wo $\varrho = 0$, d. h. die Fugenschnitte zueinander parallel gezogen werden, oder wo $\delta = 0$, d. h. der Tragkörper unendlich dünn ist, fällt der Schwerpunkt der Fuge mit der Fugenmitte zusammen.

3. *Bezeichnungen.* Fixieren wir in der Bildebene, jetzt auch Kraftebene, ein orthogonales Koordinatensystem (Fig. 2, Seite 5), dessen Ursprung beliebig gewählt sei und dessen positive Ordinatenrichtung mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfalle. Es bezeichne dann:

x, y die Koordinaten des Druckmittelpunktes E des beliebig gewählten Fugenschnittes NN',

φ den Winkel, den der Fugenschnitt NN' mit der Vertikalen einschließt (gemessen wie in der Figur).

Wird φ als veränderlich angenommen, so sind auch x und y und die folgenden mit φ in Zusammenhang stehenden Größen veränderlich:

R die Druckkraft des Fugenschnittes NN',
V die Vertikalkomponente von R,
H die Horizontalkomponente von R,
δ die Länge NN',
M der Mittelpunkt des Fugenschnittes NN' ($\overline{NM} = \frac{\delta}{2}$),
ξ die Entfernung des Druckmittelpunktes E von der Mitte des Fugenschnittes NN' ($\xi = \overline{ME}$),
$\mathfrak{S}$ der Schwerpunkt der Fuge NN',
p die spezifische Druckbelastung der oberen Begrenzungslinien im Punkte N',
ε der Winkel, den diese Kraftrichtung mit der Vertikalen einschließt (gemessen wie in der Figur),
q die spezifische Druckbelastung der unteren Begrenzungslinie im Punkte N,
η der Winkel, den diese Kraftrichtung mit der Vertikalen einschließt (gemessen wie in der Figur).

Den früheren Voraussetzungen zufolge sind p, ε, q, η stetige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen φ.

Sei N_1N_1' der in unendlicher Nähe zu NN' geführte benachbarte Fugenschnitt, der sich mit dem letzteren im Punkte Ω schneidet und ferner:

ϱ die Länge $\overline{M\Omega}$,
$d\varphi$ der zwischen den Fugenschnitten NN' und N_1N_1' eingeschlossene unendlich kleine Winkel $N'\Omega N_1'$,
E_1 der Druckmittelpunkt des Fugenschnittes N_1N_1'

$$\overline{E_1F} = dx \qquad \overline{FE} = dy,$$

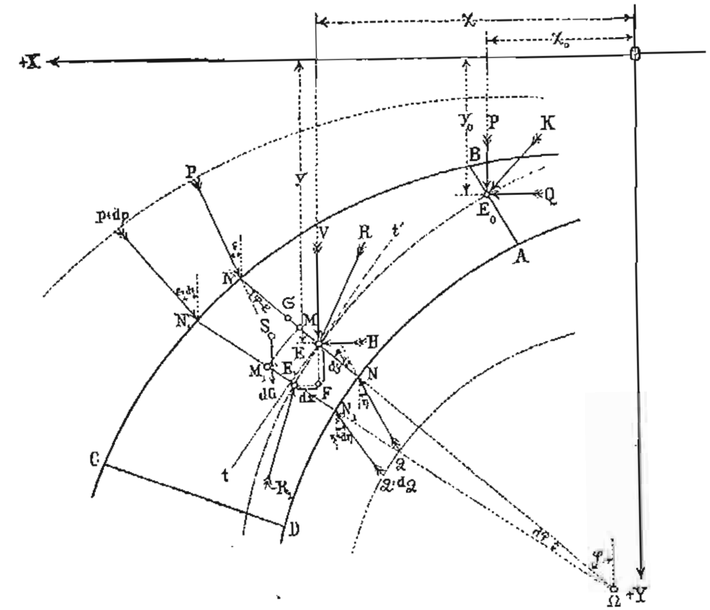
R_1 die Druckkraft des Fugenschnittes N_1N_1',
M_1 der Mittelpunkt des Fugenschnittes N_1N_1',
de das Bogendifferential $N'N_1'$,
$d\sigma$ das Bogendifferential MM_1,
di das Bogendifferential NN_1.

4. *Gleichung der Druckkurve.* Denken wir uns nun den links von N_1N_1' liegenden Teil des Tragkörpers entfernt, so stellt die Kraft $-R_1$ angreifend im Punkte E_1 das gestörte Gleichgewicht wieder her. An dem unendlich kleinen Elemente $NN'N_1'N_1$ des Tragkörpers halten sich somit folgende Kräfte im Gleichgewicht:

1. die Druckkraft R des Fugenschnittes NN' angreifend im Punkte E, welche wir in die Komponenten V und H zerlegen,
2. die negativ genommene Druckkraft R_1 des Fugenschnittes N_1N_1' angreifend im Punkte E_1,

3. das Gewicht dG des Tragkörperelementes $NN'N_1'N_1$, welches wegen der unendlichen Annäherung von N_1N_1' an NN' und gemäß den früheren Ableitungen im Schwerpunkte $\mathfrak{S}$ der Fuge NN' wirkend anzunehmen ist,
4. die Belastung des Begrenzungselementes $N'N_1'$, die wegen der unendlichen Kleinheit desselben gleich $p\,de$ und im Punkte N' angreifend zu nehmen ist,
5. die Belastung des Begrenzungselementes NN_1 gleich $q\,di$ und angreifend im Punkte N.

Fig. 2.



Die ersten zwei dieser Kräfte sind im allgemeinen endlich, die übrigen drei dagegen verschwinden mit dx und sind von derselben Kleinheitsordnung wie dx und dy.

Die Summe der statischen Momente dieser fünf Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes der Kraftebene muß wegen des Gleichgewichtes gleich Null sein. Wählt man somit den Punkt E_1 zum Momentenpunkt und bezeichnet die Momente der Kräfte dG, $p \cdot de$, $q \cdot di$ bezüglich dieses Punktes mit M_g, M_e, M_i (positiv, wenn im Sinne des Uhrzeigers drehend), so besteht die Gleichung:

$$Vdx - Hdy + M_g + M_e + M_i = 0. \tag{1}$$

In dieser Gleichung sind alle fünf Glieder von derselben Kleinheitsordnung. Bei den ersten zwei Gliedern ist die Kraft endlich, der Arm unendlich klein, bei den übrigen Gliedern ist die Kraft unendlich klein, der Arm dagegen endlich, und alle unendlich kleinen Größen sind von derselben Kleinheitsordnung.

Wegen der unendlichen Annäherung des Punktes E_1 an den Punkt E und der endlichen Entfernung der Kräfte dG, $p \cdot de$ und $q \cdot di$ von diesen Punkten sind die Entfernungen dieser Kräfte vom Punkte E_1 ihren Entfernungen vom Punkt E gleichzusetzen.

Es ist dann, wie leicht einzusehen:

$$M_g = -\,dG(\overline{\mathfrak{S}M} + \xi)\sin\varphi,$$

wo

$$dG = g\beta \cdot \delta \cdot \varrho \cdot d\varphi.$$

Werden die Fugenschnitte zueinander parallel geführt, so ist $\varrho = \infty$, $\varrho d\varphi$ dagegen gleich der unendlich kleinen Entfernung der beiden Fugenschnitte zu setzen.

Es ist, wie im Punkt 2 abgeleitet wurde:

$$\overline{\mathfrak{S}M} = \tfrac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho},$$

so daß:

$$M_g = -\,g \cdot \beta \cdot \delta\left(\tfrac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho} + \xi\right)\sin\varphi \cdot \varrho d\varphi. \tag{2}$$

Es ist ferner

$$M_e = -\,(p\,de)\overline{N'E}\sin(\varphi - \varepsilon) = -\,p\left(\frac{\delta}{2} + \xi\right)\sin(\varphi - \varepsilon)\,de, \tag{3}$$

$$M_i = -\,(q\,di)\overline{NE}\sin(\varphi - \eta) = -\,q\left(\frac{\delta}{2} - \xi\right)\sin(\varphi - \eta)\,di. \tag{4}$$

Die Substitution der Gleichungen (2), (3), (4) in (1) liefert:

$$\begin{aligned} V dx - H dy - g\beta\delta\varrho\left(\tfrac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho} + \xi\right)\sin\varphi\, d\varphi - p\left(\frac{\delta}{2} + \xi\right)\sin(\varphi - \varepsilon)\,de\, - \\ -\,q\left(\frac{\delta}{2} - \xi\right)\sin(\varphi - \eta)\,di = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Ist für einen Fugenschnitt AB der Druckmittelpunkt E_0 — dessen Koordinaten x_0 und y_0 sind — und die Druckkraft K — dessen orthogonale Komponenten P und Q sind — gegeben, d. h. ist für

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0, \quad V = P \quad \text{und} \quad H = Q, \end{cases} \tag{6}$$

so ist, wie leicht einzusehen:

$$V = P + g\beta\int_{x_0}^{x}\delta \cdot \varrho d\varphi + \int_{x_0}^{x} p\cos\varepsilon\, de - \int_{x_0}^{x} q\cos\eta\, di, \tag{7}$$

$$H = Q - \int_{x_0}^{x} p\sin\varepsilon\, de + \int_{x_0}^{x} q\sin\eta\, di. \tag{8}$$

Ist die Form des Tragkörpers, die Art der Belastung und der Führung der Fugenschnitte mathematisch angegeben, so lassen sich alle in den Gleichungen (5), (7) und (8) vorkommenden Veränderlichen durch φ und ξ ausdrücken. Die Substitution der Gleichungen (7) und (8) in die Gleichung (5) und zweimalige Differentiation nach φ liefert eine Differentialgleichung zwischen φ und ξ allein, und dies ist die Differentialgleichung der Druckkurve, welche auch auf die Koordinaten x und y transformiert werden kann.

Ist dieselbe integrierbar, so dienen die drei Beziehungen (6) zur Bestimmung der drei Integrationskonstanten.

Aus Gleichung (5) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\Big\{g\beta\delta\varrho\left(\tfrac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho} + \xi\right)\sin\varphi\frac{d\varphi}{dx} + p\left(\frac{\delta}{2} + \xi\right)\sin(\varphi - \varepsilon)\frac{de}{dx} + \\ + q\left(\frac{\delta}{2} - \xi\right)\sin(\varphi - \eta)\frac{di}{dx}\Big\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Bezeichnet

ψ den Neigungswinkel der Druckkraft R zur X-Achse,

α den Neigungswinkel der Tangente tt' an die Druckkurve im Punkte E zur X-Achse, so ist offenbar:

$$\frac{V}{H} = \operatorname{tang}\psi \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha. \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (9) und (10) folgt, daß im allgemeinen

$$\psi \gtrless \alpha,$$

d. h. die Druckkraft schneidet die Druckkurve.

Gewölbe-Druckkurven.

5. Die Gewölbe tragen nur eine obere Belastung, welche als vertikal wirkend angenommen wird. Es ist hier also

$$q = 0 \qquad \varepsilon = 0.$$

Außerdem führt man die Fugenschnitte senkrecht zur Gewölbsachse, entsprechend der Art der Ausführung, und um die Gesetze der

Elastizitätslehre anwenden zu können. Die Gewölbsachse ist auch der geometrische Ort der Fugenmittelpunkte. Deshalb ist hier

ϱ gleichbedeutend mit dem Krümmungsradius der Gewölbsachse,
φ gleich dem Neigungswinkel der Tangente der Gewölbsachse (im Punkte M) zur X-Achse,
$d\sigma$ gleich dem Bogendifferential der Gewölbsachse, so daß

$$\varrho \cdot d\varphi = d\sigma.$$

Die Gleichungen (9), (7) und (8) gehen deshalb für diesen Fall über in:

$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\left\{g\beta\delta\left(\tfrac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho} + \xi\right)\sin\varphi\frac{d\sigma}{dx} + p\left(\frac{\delta}{2} + \xi\right)\sin\varphi\frac{de}{dx}\right\}, \tag{11}$$

$$V = P + g\beta\int_{x_0}^{x}\delta\, d\sigma + \int_{x_0}^{x} p\, de, \tag{12}$$

$$H = Q. \tag{13}$$

Gleichung (13) besagt, daß die Horizontalkomponente der Druckkraft für alle Fugenschnitte eine und dieselbe ist.

Nach der Substitution der Gleichungen (12) und (13) in die Gleichung (11) genügt eine einmalige Differentiation, um die Integralzeichen zu eliminieren. Die Differentialgleichung der Gewölbe-Druckkurve wird somit von der zweiten Ordnung sein. Dieselbe enthält schon eine Konstante Q. Ihr vollständiges Integral enthält demnach drei Konstanten und stellt — wofern diese nicht bestimmt sind — ein System von unendlich vielen Druckkurven dar. Die Bestimmung des partikularen Integrals, welches die in Wirklichkeit auftretende Druckkurve darstellt, kann bei Gewölben nicht auf rein statischem Wege erfolgen. Wir werden uns deshalb mit dieser Frage nicht befassen, zumal für die in dieser Abhandlung behandelten Fragen die Bestimmung der in Wirklichkeit auftretenden Druckkurve nicht notwendig ist.

6. *Gewölbe gleichen Widerstandes.* Unter einem Gewölbe gleichen Widerstandes versteht man ein Gewölbe, welches so geformt ist, daß für den gegebenen Belastungsfall:

1. die Gleichung der Gewölbsachse ein partikulares Integral der Differentialgleichung der Druckkurve ist,
2. die Breite δ der Fugenschnitte proportional ist der zu denselben normalen Komponente N der Druckkraft R.

Ist die Forderung 1 erfüllt, so fällt eine der Druckkurven mit der Gewölbsachse zusammen, wird diese als die in Wirklichkeit auftretende angenommen — was übrigens aus der neuen Theorie der

Gewölbe folgt und bei Gewölben mit Gelenken ohne Zweifel der Fall ist —, so greift die Druckkraft in jedem Querschnitt zentrisch an. Die Verteilung der Normalspannung ist also in jedem Querschnitt eine gleichmäßige. Ist die Forderung 2 erfüllt, so sind die Normalspannungen in allen Querschnitten einander gleich. Das Gewölbe weist dann überall denselben Widerstand gegen Normalspannungen auf.

Die Forderung 1 wird analytisch ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\xi = 0,$$

und indem man x und y auch als die Koordinaten des Punktes M der Gewölbsachse auffaßt. Es ist deshalb:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha \quad \varphi = \alpha \quad d\sigma = ds = \frac{dx}{\cos\varphi}.$$

Die Gleichung (11) geht dann über in:

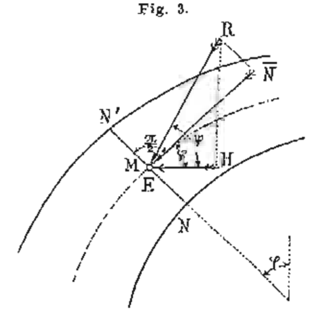
$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\left\{\tfrac{1}{12}g\beta\frac{\delta^3}{\varrho}\operatorname{tang}\varphi + \tfrac{1}{2}p\delta\sin\varphi\frac{de}{dx}\right\}. \tag{14}$$

Die Gleichungen (12) und (13) bleiben ungeändert.

Es ist noch δ derart zu bestimmen, daß es der Forderung 2 entspricht. Wird die rechte Seite der Gleichung (14), welche als eine Funktion von x, y und δ darstellbar ist, mit $F(x, y, \delta)$ bezeichnet, so ist bei Berücksichtigung der Gleichung (10)

$$\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\varphi = F(x, y, \delta). \tag{15}$$

Fig. 3.



Die zu dem Fugenschnitt NN' normale Komponente $\overline{N}$ der Druckkraft R ist, wie aus Fig. 3 zu ersehen:

$$\overline{N} = R\cos(\psi - \varphi),$$

und da

$$R = \frac{H}{\cos\psi},$$

so wird

$$\overline{N} = H\frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos\psi}. \tag{16}$$

Die Forderung 2 wird analytisch ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\delta = k \cdot \overline{N},$$

wo k eine Konstante bedeutet. Es ist demnach:

$$\delta = k \cdot H\frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos\psi} = k \cdot H\{\cos\varphi + \sin\varphi\operatorname{tang}\psi\}$$
$$= k \cdot H\{\cos\varphi + \sin\varphi\,[\operatorname{tang}\varphi + F(x, y, \delta)]\},$$

so daß

$$\delta = kH\left\{\frac{1}{\cos\varphi} + \sin\varphi \cdot F(x, y, \delta)\right\}. \tag{17}$$

Die Gleichungen (14), (17), (12) und (13) führen auf zwei Differentialgleichungen zwischen den Variablen x, y, δ. Ihre Integration liefert die Gleichung der Achse des Gewölbes gleichen Widerstandes und das Gesetz, nach welchem der Fugenschnitt δ variiert.

Für den Fall, wo das Gewölbe nicht überschüttet ist und nur sein Eigengewicht zu tragen hat, gehen die vier Gleichungen über in:

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{V}{H} - \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{H}\dfrac{1}{12}\cdot g\beta\dfrac{\delta^3}{\varrho}\,\mathrm{tang}\,\varphi = F_1(x,\,y,\,\delta) \\ \delta = RH\left\{\dfrac{1}{\cos\varphi} + \sin\varphi F_1(x,\,y,\,\delta)\right\} \\ V = P + g\beta\displaystyle\int_{x_0}^{x}\delta\cdot ds \qquad\qquad H = Q. \end{cases}$$

Selbst für diesen einfachen Fall ist an eine Integration der vorstehenden Gleichungen nicht zu denken. Dieselben sind jedoch für uns wichtig, weil wir im zweiten Kapitel die Lösung des von anderen Autoren versuchten Problems der Gewölbe gleichen Wiederstandes besprechen wollen.

Stützlinien und Kettenlinien.

7. Hat der Tragkörper nur vertikale Lasten zu tragen und werden die zur Erzeugung der Druckkurve geführten Fugenschnitte auch vertikal angenommen, wird also gesetzt:

$$\varphi = 0 \qquad \varepsilon = 0 \qquad \eta = 0,$$

so geht die allgemeine Gleichung (9) über in

$$(19)\qquad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (10) ist deshalb

$$(20)\qquad \psi = \alpha,$$

d. h. die Druckkraft berührt die Druckkurve, welche wir in diesem Falle Stützlinie nennen wollen.

Da alle Lasten vertikal wirken, so braucht nicht zwischen der oberen und unteren Belastung und dem Eigengewichte des Tragkörpers unterschieden zu werden. Es bezeichne daher $\omega = f(x)$ die spezifische Belastung der Horizontalprojektion des Tragkörpers und ω sei als Funktion von x gegeben. Es ist dann:

$$(21)\qquad V = P + \int_{x_0}^{x}\omega\,dx, \qquad\qquad H = Q,$$

deshalb

$$(22)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q}\left\{P + \int_{x_0}^{x}\omega\,dx\right\}.$$

Die Differentiation der vorstehenden Gleichung nach x liefert:

$$(23)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{Q}.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Stützlinie.

Die Integration der Gleichung (22) liefert, wenn man berücksichtigt, daß für $x = x_0$ $y = y_0$,

$$(24)\qquad y = y_0 + \frac{1}{Q}\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}w\,dx + \frac{P}{Q}(x - x_0).$$

Dies ist die Gleichung der Stützlinie.

8. Für eine unbelastete Strecke, wo also

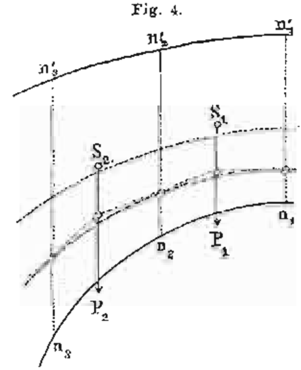
$$w = 0,$$

lautet die Gleichung der Stützlinie

$$(25)\qquad y = y_0 + \frac{P}{Q}(x - x_0).$$

Die Stützlinie ist hier also eine Gerade. Wird demnach die kontinuierliche Belastung des Tragkörpers, die nach dem durch die Figur $n_1 n_2 n_3 \ldots n_1' n_2' n_3' \ldots$ veranschaulichten Gesetze über den Tragkörper verteilt ist, durch die vertikalen Schnitte $n_1 n_1'$, $n_2 n_2'$, $n_3 n_3' \ldots$ in Lamellen geteilt und durch das System der Einzellasten P_1, $P_2 \ldots$ ersetzt, welche in den Schwerpunkten S_1, $S_2 \ldots$ dieser Lamellen wirken und den Gewichten der Lamellen gleich sind, so wird die Stützlinie für diesen zweiten Fall der Belastung in ein Polygon (Stützpolygon) übergehen, dessen Eckpunkte in den Richtungslinien der Lasten P_1, $P_2 \ldots$ liegen. In den einzelnen Schnitten $n_1 n_1'$, $n_2 n_2' \ldots$ wird das Stützpolygon die Stützlinie für die ursprüngliche Art der Belastung berühren, weil sich an diesen Stellen durch die Teilung der kontinuierlichen Last in Lamellen weder der Druckmittelpunkt noch die Druckkraft geändert hat. Das Stützpolygon ist also der ursprünglichen Stützlinie umgeschrieben.

Fig. 4.



9. Geht der Tragkörper in eine dünne, absolut biegsame Kette über, so ist nur dann Gleichgewicht möglich, wenn die Druckkurve mit der Kette zusammenfällt. Um also die Gleichung der Kettenlinie zu bekommen, hat man in der Gleichung (9) zu setzen:

$$\xi = 0;$$

und da

$$\delta = 0,$$

so ist:

$$de = di = d\sigma = ds,$$

mithin

$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = 0. \tag{26}$$

Setzen wir die Kette — obwohl sie unendlich dünn ist — schwer voraus und bezeichnen mit

g_x das spezifische Gewicht der Kette an der Stelle x, y, so ist

$$V = P + \int_{x_0}^{x} g_x ds + \int_{x_0}^{x} p \cos \varepsilon\, ds - \int_{x_0}^{x} q \cos \eta\, ds \tag{27}$$

$$H = Q - \int_{x_0}^{x} p \sin \varepsilon\, ds + \int_{x_0}^{x} q \sin \eta\, ds. \tag{28}$$

Die Gleichungen (26), (27) und (28) bestimmen die Gleichung der Kettenlinie. Werden die Lasten vertikal angenommen, so sind die Gleichungen für die Kettenlinie und die Stützlinie einander gleich. Es kann demnach die Stützlinie aufgefaßt werden als labile Gleichgewichtsform einer unendlich dünnen Kette, deren spezifische Belastung über die Horizontalprojektion derselben dargestellt ist durch:

$$\omega = f(x).$$

10. Unsere Bezeichnung „Stützlinie“ nur für den speziellen Fall der Druckkurve, wo die Lasten und Fugenschnitte vertikal sind, ist nicht die allgemein übliche. Sind doch in der technischen Mechanik die Begriffe: Stützlinie für Wasserdruck, für Erddruck usw. eingeführt, also für Lasten, die nicht vertikal wirken. In diesen Fällen muß aber der Tragkörper absolut biegsam und unendlich dünn angenommen werden, so daß sich dann diese Stützlinien auch ihrer mechanischen Entstehungsweise nach nicht von den Kettenlinien unterscheiden. Wir stellen sie deshalb unter dieselben.

Die Definition der Stützlinie, wie wir sie hier entwickelt haben, als den geometrischen Ort der Druckmittelpunkte vertikaler Fugenschnitte eines Tragkörpers, welcher nur vertikale Lasten trägt, ist auch in A. Ritter, Ingenieur-Mechanik 1899, § 119 entwickelt worden. Wenn dann in demselben Buche von Stützlinien für Erddruck, für Wasserdruck usw. die Rede ist, so entsprechen diese Stützlinien der vorher aufgestellten Definition der Stützlinie nicht.

Zweites Kapitel.

Die in den verschiedenen bestehenden Theorien der Druckkurven auftretenden Irrtümer.

11. Das dritte Kapitel wird einige Anwendungen der im ersten Kapitel entwickelten Theorie bringen. Wenn dieselbe Anspruch auf Würdigung erheben kann, so ist es hauptsächlich deshalb, weil sie einige irrtümliche Anschauungen, die in der Fachliteratur über die Eigenschaften der Druckkurven vorhanden sind, aufzuklären und zu beseitigen vermag.

Der Ausdruck „irrtümliche Anschauungen“ dürfte vielleicht übertrieben erscheinen. Um nun dem Vorurteil des Lesers vorzubeugen, daß wir in diesem kritischen Teile unserer Abhandlung kleinlich und mit übertriebener Pedanterie vorgehen werden, wollen wir zuerst auseinandersetzen, was wir unter Irrtum verstehen.

In der angewandten Mechanik ist nicht jene mathematische Schärfe erforderlich wie in der reinen Mechanik. Um die Probleme der angewandten Mechanik in der mathematischen Sprache ausdrücken und um dieselben mit Hilfe der Mathematik aufklären und lösen zu können, müssen hinsichtlich des Materiales, der Art der Ausführung usw. Voraussetzungen gemacht werden, welche nicht vollkommen der Wirklichkeit entsprechen. Dies muß geschehen, will man nicht auf die Hilfe der Mathematik verzichten.

Die Zuverlässigkeit der Lösung des so auf das Gebiet der Mathematik übertragenen Problems ist demgemäß der Zulässigkeit der gemachten Voraussetzungen angemessen. Je weniger diese Voraussetzungen der Wirklichkeit entsprechen, umso weniger Vertrauen verdient die Lösung des gestellten Problems, welche dann nur eine annähernde ist. Deshalb ist es zulässig, bei dem mathematischen Teile der Behandlung des Problems nicht mit absoluter mathematischer Schärfe vorzugehen und Vernachlässigungen erscheinen berechtigt, wenn man sich ihrer bewußt ist und wenn sie im Einklang stehen mit der Unvollständigkeit der gemachten Voraussetzungen und mit der praktischen Bedeutung des Problems. Deshalb sind bewußte Vernachlässigungen in der mathematischen Behandlung des Problems nicht zu den Irrtümern zu zählen.

Direkte Irrtümer entstehen unserer Ansicht nach

erstens: wenn man bei der Übertragung des Problems auf das mathematische Gebiet nicht alle Umstände richtig und mit der Wirklichkeit zusammenhängend erfaßt hat, d. h. wenn die mathematische Stilisierung des Problems unrichtig ist,

zweitens: wenn die mathematische Lösung des richtig stilisierten Problems unbewußt fehlerhaft ist. Diese Art der Irrtümer, die also rein theoretischer Natur sind und in der fehlerhaften Anwendung der Theorie bestehen, sind, unserer Ansicht nach, als schwerwiegende zu betrachten, ohne Rücksicht darauf, ob der gemachte Fehler die praktische Anwendbarkeit der Lösung des Problems in Frage stellt oder nicht. Deshalb glauben wir die praktische Zulässigkeit dieser Fehler nicht untersuchen zu müssen, denn diese kann bei einem unbewußten Fehler nur die Folge des blinden Zufalls sein; und dieselbe als Rechtfertigung für den begangenen Fehler zu betrachten, hieße die Wissenschaft profanieren; außerdem bewegen sich unsere Untersuchungen auf rein theoretischem Gebiete und berühren nicht ihre praktische Anwendung.

12. Alle in den verschiedenen Theorien der Gewölbe auftretenden Irrtümer, auf die wir hier verweisen wollen, können auf zwei verschiedene Fehler in der mathematischen Behandlung des Problems zurückgeführt werden:

erstens: das Gewicht dG des unendlich dünnen Elementes $NN'N_1'N_1$ des Tragkörpers (Fig. 2, Seite 5) wird in der Mitte M der Fuge NN' wirkend angenommen und nicht im Schwerpunkt $\mathfrak{S}$ der Fuge, wie dies nach unseren Auseinandersetzungen im Punkte 2 zu geschehen hat,

zweitens: das statische Moment M_g dieses Gewichtes bezüglich des Punktes E_1 der Druckkurve, mitunter auch die statischen Momente M_e, M_i der Belastungen der Begrenzungselemente $N'N_1'$ und NN_1 bezüglich desselben Punktes, werden als Größen zweiter Kleinheitsordnung angenommen, was nach unseren Ableitungen im Punkte 4 falsch ist.

Die erste dieser Annahmen ist kein Fehler, wenn die Fugenschnitte parallel zu einander geführt werden, d. h. wenn $\varrho = \infty$, oder wenn die Fugenbreite δ im Verhältnis zu ϱ als verschwindend klein angenommen werden kann. Dies trifft z. B. bei Ketten zu, doch darf diese Voraussetzung in keinem Buche, das Anspruch auf wissenschaftliche Strenge erheben will, verschwiegen werden.

Die zweite Annahme ist nur dann kein Fehler, wenn alle Lasten vertikal sind und die Fugenschnitte auch vertikal geführt werden, oder wenn der Tragkörper in eine unendlich dünne absolut biegsame Kette übergeht. Wenn man diesen Fehler begeht, d. h. in der Gleichung (1) des ersten Kapitels setzt:

$$M_g = M_e = M_i = 0,$$

so folgt daraus

$$\frac{V}{H} = \frac{dy}{dx}$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung (10)

$$\psi = \alpha,$$

was besagt, daß die Druckkraft die Druckkurve berührt. In diesen falschen Schluß, der auf die größten Absurditäten führen kann, klingen fast alle Irrtümer der Theorie der Druckkurven aus.

13. Die Erscheinungen dieser Irrtümer in allen Einzelheiten zu verfolgen, hieße einen historischen Überblick über die schon über 70 Jahre alte Theorie der Druckkurven geben, was aber weit über den Rahmen dieser Abhandlung hinausginge.[1]) Wir werden deshalb nur die wichtigsten Momente dieser merkwürdigen Erscheinung besprechen und nur jene Werke in Betracht ziehen, in welchen diese Irrtümer am deutlichsten hervortreten und von welchen als rein theoretischen Werken die wissenschaftliche Strenge gefordert werden muß.

Hagen behandelte in einer der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlung[2]) das Problem des Gewölbes gleichen Widerstandes, welches wir im Punkte 6 ausführlich behandelt haben. Im mathematischen Teile der Behandlung dieses Problems nimmt Hagen als selbstverständlich an, daß die Druckkraft die Druckkurve berührt.[3]) Dies ist nur dann richtig, wenn das Gewölbe unendlich dünn ist und mit einer Kette verglichen werden kann. Da aber das Problem der Kette gleichen Widerstandes schon im Jahre 1826 vollständig gelöst worden ist, so kann der Abhandlung von Hagen entweder Mangel an wissenschaftlicher Strenge oder Mangel an Originalität vorgeworfen werden. In der umgearbeiteten und er-

1) Über einige Irrtümer, die vor dem Jahre 1857 begangen worden sind und insofern sie als Irrtümer erkannt worden sind, siehe Scheffler: Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857.

2) Hagen: Über Form und Stärke der gewölbten Bogen. Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Mathematische Abhandlungen) 1844.

3) Bei Anwendung der von uns gewählten Bezeichnungen heißt es dort (S. 68): „Der Winkel ψ, den die Druckkraft mit der Horizontalen einschließt, bezeichnet schon die Richtung der an den Punkt E der Druckkurve gezogenen Tangente.“

weiterten zweiten Auflage dieser Abhandlung wiederholen sich dieselben Fehler.[1])

Résal unternahm es, die Differentialgleichung der Druckkurve aufzustellen[2]), beging aber dabei den groben Fehler, daß er ausdrücklich behauptete, das Glied Mg der Gleichung (1) (Punkt 4) sei eine Größe zweiter Kleinheitsordnung und somit zu vernachlässigen.[3]) Nachdem es ihm infolge dieses Irrtums nicht gelungen ist, die Gleichung der Druckkurve des kreisförmigen Gewölbes von konstanter Stärke abzuleiten, schließt er daraus, daß die Gleichungen der Druckkurven auf höhere Transzendenten führen.[4])

Einen so ausgesprochenen Fehler, wie den soeben angeführten, wird man schwerlich anderswo finden, doch kehren dieselben Fehler in der Fachliteratur immer wieder, sind aber durch die daraus abgeleiteten Folgerungen mehr oder weniger verdeckt. Selbst so einfache Beziehungen, wie die im Punkte 8 abgeleiteten, sind nicht immer richtig erfaßt worden. Wir verweisen diesbezüglich auf eine Stelle in

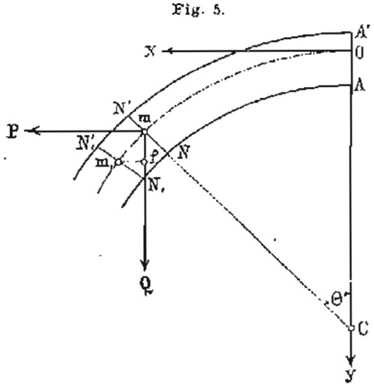
---

1) Hagen: Über Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1862. Wenn wir unsere Bezeichnungen beibehalten, so finden sich dort die Gleichungen (S. 42 ff. und S. 50 ff.)

$$\frac{V}{H} = \operatorname{tang}\varphi, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi.$$

2) Résal: Traité de mécanique générale. Paris 1873—1889 (Tome 6, § 238).

Fig. 5.



3) Die Ableitung von Résal ist die folgende: Soient NN', N_1N_1' deux joints consécutifs, $m m_1$ les points correspondants d'une courbe des pressions, O l'intersection de cette courbe avec la direction $A'Ay$ du joint de la clef, Ox l'horizontale de ce point, f la projection de m_1 sur la direction de Q. — Conservons d'ailleurs les notations précédentes; on a $m_1 f = dx$, $mf = dy$. La pression exercée sur NN' est la résultante de P et du poids Q de $NN'AA'$ ces deux forces étant censées appliquées en m. — Pour trouver la position m_1 il suffit d'exprimer que la somme des moments de P et Q et du poids de $NN'N_1N_1'$ par rapport à ce point est nulle. Or *le moment de ce dernier poids étant du second ordre,* on a simplement:

$$Pdy = Qdx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}.$$

4) Siehe die Fußnote auf S. 20.

Föppls Theorie der Gewölbe.[1]) Auch in einem ganz modernen Werke[2]) können Fehler in der analytischen Behandlung der Druckkurven nachgewiesen werden.

Wir glauben, daß die angeführten Belege genügen, um unsere Behauptung zu rechtfertigen, daß in der Fachliteratur die Beziehung der Druckkraft zur Druckkurve nicht vollständig ergründet war.

14. Es soll noch hervorgehoben werden, daß die fehlerhafte Annahme, daß die Druckkraft die Druckkurve berühre, nicht von dem Begründer der Theorie der Druckkurven Moseley herrührt, der in dieser Frage klar gesehen hat[3]), und es hat auch später nicht an Stimmen gefehlt, die auf die Irrtümlichkeit dieser Annahme hingewiesen haben. Hauptsächlich war es Scheffler, der — offenbar beeinflußt von dem Werk Moseleys, welches er ins Deutsche übersetzte — die Irrtümlichkeit dieser Annahme zu beweisen suchte.[4]) Wenn trotzdem diese Irrtümer aus der Theorie der Druckkurven nicht verschwunden sind und noch heute wiederkehren, so hat diese Erscheinung, unserer Ansicht nach, folgende Erklärung: Scheffler und alle, welche seine Einwendungen wiederholt haben[5]), haben doch nicht das Wesen des in Rede stehenden Irrtums vollständig klar erfaßt und weisen nur auf das Absurde der gemachten Annahme hin. Der

---

1) Föppl: Theorie der Gewölbe. Leipzig 1881. S. 10. — „Bei der analytischen Behandlung der Gewölbe nimmt man gewöhnlich an, das Gewölbe bestehe aus unendlich vielen unendlich dünnen Wölbsteinen. Die Druckkurve geht dadurch in eine stetig gekrümmte Linie über. Die einer endlichen Fugeneinteilung zugehörige, der vorigen entsprechende Drucklinie ist ein derselben eingeschriebenes Polygon." — Hier steckt ein doppelter Fehler. Das Polygon ist ein umgeschriebenes und zwar nur dann, wenn vertikale Fugenschnitte vorausgesetzt werden.

2) Résal: Stabilité des constructions. Paris 1901. — Dort heißt es, unter Beibehaltung unserer Bezeichnungen und obwohl die Fugenschnitte nicht parallel zueinander geführt werden (S. 549 ff.): „La condition de coïncidence de la courbe des pressions et de la fibre moyenne nous fournit la relation:

$$\frac{V}{dy} = \frac{H}{dx}.$$

3) Siehe z. B. H. Moseley: Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur, übers. v. H. Scheffler. Braunschweig 1845. — In diesem Werke wird hervorgehoben, daß die Druckkraft die Druckkurve (line of resistance) schneidet und der Begriff der Enveloppe der Druckkraftrichtungen (line of pressure) wird eingeführt.

4) Scheffler: Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857.

5) z. B. Herrmann bei der Bearbeitung der Ingenieur- und Maschinenmechanik von Weisbach; Föppl in seinen Vorlesungen über technische Mechanik.

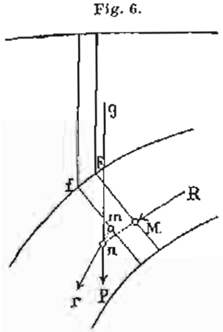
Schefflersche Beweis, daß die Druckkraft die Druckkurve schneidet, drückt sich in der Behauptung aus, daß die Druckkurve (er nennt sie Stützlinie) nicht mit der Enveloppe der Druckkräfte-Richtungen (welche er Kettenlinie nennt) zusammenfällt[1]), was übrigens schon Moseley klar ausgesprochen hat. Diesen Beweis liefert Scheffler nur für den Fall, wo das Gewölbe überschüttet ist, und man ist fast verleitet zu glauben, daß er bei einem unüberschütteten Gewölbe, insbesondere bei einem solchen, welches nach der Druckkurve gekrümmt ist, die Richtigkeit der Annahme, daß die Druckkraft die Druckkurve berühre, schweigend zugibt. Daß man seine Ableitung in diesem Sinne verstanden hat, zeigt die Wiedergabe des Schefflerschen Beweises in der von Herrmann umgearbeiteten Ingenieur- und Maschinenmechanik von Weisbach[2]), wo das Gewölbe notwendig überschüttet vorausgesetzt wird, damit der Beweis geliefert werden kann. Scheffler hat auch die von uns im Punkte 13 als irrtümlich bezeichnete Behauptung von Hagen nicht bestritten, obwohl er dessen Abhandlung einer eingehenden Kritik unterzogen hat.

Die korrekteste von den bestehenden Theorien der Druckkurven ist wohl die von Dupuit[3]), welche sich aber auf ganz spezielle Fälle beschränkt. Die von Dupuit abgeleitete Differentialgleichung der

---

1) Scheffler: Theorie der Gewölbe. S. 216: Stellt man sich das auf die Fuge EF folgende Element $EFfe$ des Gewölbbogens *mit seiner Belastung* vor, und ist gp die durch den Schwerpunkt dieses Elementes vom Gewichte p gezogene Vertikale, welche doch nicht gerade durch den Punkt M zu gehen braucht, ferner n der Durchschnittspunkt dieser Vertikalen mit der Richtung RM der gegen die Fuge EF wirkenden Pressung R, endlich rn die von RM unendlich wenig verschiedene Resultante der beiden Kräfte R und p, welche die Fuge ef in dem Punkte m durchschneiden mag; so werden M und m zwei aufeinanderfolgende Punkte der in eine stetige Kurve übergehenden Stützlinie Mm ... sein; dagegen wird der den Punkten M und m entsprechende Anfangspunkt des in eine stetige Kettenlinie übergehenden Seilpolygons der Punkt n sein, welcher keineswegs zwischen M und m fällt und von beiden einen *endlichen* Abstand hat. Demnach wird die stetige Stützlinie nicht allein eine von der Kettenlinie *endlich* verschiedene Form haben, sondern die korrespondierenden Punkte der letzteren werden auch um *endliche* Abstände aus den betreffenden Fugenschnitten herausrücken.

Fig. 6.



2) Vergleiche Weisbach, Ingenieur- und Maschinenmechanik, 5. Auflage, bearbeitet von Herrmann, Statik der Bauwerke, S. 102.

3) Dupuit: Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie. 1870.

Druckkurve entspricht dem speziellen Fall eines Gewölbes, welches nur sein Eigengewicht trägt, und ist auf allgemeinere Fälle nicht anzuwenden. Ohne infinitesimale Betrachtungen über den Schwerpunkt des unendlich dünnen Tragkörperteiles war der Kern der ganzen Frage: die *mathematischen* Eigenschaften der Druckkurven, welche allein die Frage vollständig beleuchten können, nicht zu erfassen. Deshalb kehrten die Fehler in der Theorie der Druckkurven immer wieder.

Drittes Kapitel.

Anwendungen und Beispiele.

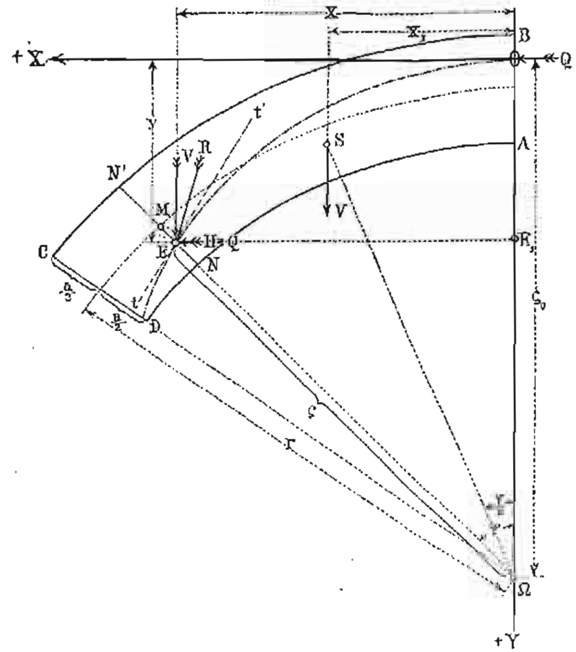
Druckkurve im unbelasteten Kreisgewölbe von konstanter Stärke.

15. Wir wollen hier die Gleichung der Druckkurve des unbelasteten Kreisgewölbes von konstanter Gewölbstärke ableiten. Zu diesem Behufe bezeichne:

r den Radius der Bogenachse,

a die konstante Gewölbstärke.

Fig. 7.



Der Ursprung des Koordinatensystems sei in den Druckmittelpunkt O der Scheitelfuge AB gelegt, dessen Entfernung vom Zentrum Ω der Bogenachse wir mit ϱ_0 bezeichnen. Sonst sollen die Bezeichnungen wie im Punkte 3 beibehalten werden und es sei angenommen: $\beta = 1$, $g = 1$.

Wegen der Symmetrie des Gewölbes wird die Druckkraft der Scheitelfuge AB nur die horizontale Kraft Q sein, so daß für $x = 0$:

$$y = 0 \qquad V = P = 0 \qquad H = Q.$$

Man hat also in die Gleichungen (11), (12) und (13) des Punktes 5 einzusetzen:

$$g = 1 \quad \beta = 1 \quad \delta = a \quad \varrho = r \quad p = 0 \quad d\sigma = r\,d\varphi \quad P = 0,$$

welche dann übergehen in:

$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} ar\left(\frac{1}{12}\frac{a^2}{r} + \xi\right)\sin\varphi \frac{d\varphi}{dx}, \tag{1}$$

$$V = ar\int_0^\varphi d\varphi = \mathrm{arc}\,\varphi, \tag{2}$$

$$H = Q. \tag{3}$$

Geht man zu Polarkoordinaten über und wählt den Mittelpunkt Ω der Bogenachse zum Pol, die $(-Y)$-Achse zur Polachse und bezeichnet die Polarkoordinaten des Punktes E durch:

$$\overline{\Omega E} = \varrho \qquad \sphericalangle\, O\Omega E = \varphi,$$

so ist:

$$y = \varrho_0 - \varrho\cos\varphi \qquad x = \varrho\sin\varphi,$$

$$dy = -\cos\varphi\, d\varrho + \varrho\sin\varphi\, d\varphi, \tag{4}$$

$$dx = \sin\varphi\, d\varrho + \varrho\cos\varphi\, d\varphi. \tag{5}$$

Auch hat man:

$$\xi = r - \varrho.$$

Werden die Gleichungen (2), (3), (4), (5) und (6) in die Gleichung (1) eingesetzt, so gelangt man zu der Gleichung:

$$\begin{aligned} \varrho(ar\varphi\cos\varphi\, d\varphi + ar\sin\varphi\, d\varphi - Q\sin\varphi\, d\varphi) + (ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi)\,d\varrho = \\ = \tfrac{1}{12}a(a^2 + 12r^2)\sin\varphi\, d\varphi. \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Differentialgleichung ist eine exakte[1]); beiderseits stehen vollständige Differentiale, und ihre Integration liefert:

$$\varrho(ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi) = -\tfrac{1}{12}a(a^2 + 12r^2)\cos\varphi + C \tag{8}$$

1) Die von Résal fehlerhaft abgeleitete Differentialgleichung der Druckkurve lautet, wenn wir unsere Bezeichnungen anwenden (Résal: Traité de mécanique générale, Tome 6, § 288)

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{ar\varphi\cos\varphi - Q\sin\varphi}{ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi}.$$

Dann heißt es weiter:

„Si l'on remarque que

$$ar\varphi\cos\varphi - Q\sin\varphi = \frac{d}{d\varphi}(ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi) - ar\sin\varphi$$

für $\varphi = 0$ ist $\varrho = \varrho_0$, so daß:

$$\varrho_0 Q = -\tfrac{1}{12}a(a^2 + 12r^2) + C, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \varrho(ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi) &= \varrho_0 Q + \tfrac{1}{12}a(a^2 + 12r^2)(1 - \cos\varphi) = \\ &= \varrho_0 Q + \tfrac{1}{6}a(a^2 + 12r^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

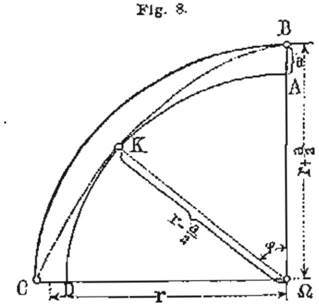
Es lautet demnach die Polargleichung der Druckkurve:

$$\varrho = \frac{\varrho_0 Q + \frac{1}{6}a(a^2 + 12r^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{Q\cos\varphi + ar\varphi\sin\varphi}. \tag{10}$$

16. Die gewonnene Gleichung der Druckkurve kann man benutzen, um die *mathematische Stärke* des behandelten Gewölbes zu bestimmen. Unter mathematischer Stärke versteht man jene minimale Stärke, bei welcher das Gewölbe noch stabil sein kann, d. h. bei welcher gerade noch eine Druckkurve ganz innerhalb des Gewölbequerschnittes verläuft.

A. Ritter[2]), Pilgrim[3]) und andere haben sich mit dieser Frage befaßt, deren Lösung wir hier als Anwendung der entwickelten Theorie anführen, um zu zeigen, daß die Frage ohne Schwierigkeit direkt gelöst werden kann.

Fig. 8.



Wir werden die mathematische Stärke eines Halbkreisgewölbes bestimmen und bemerken, daß die mathematische Stärke eines Segmentgewölbes nach demselben Vorgang bestimmt wird.

Nach den Untersuchungen der beiden genannten Autoren geht die der mathematischen Stärke entsprechende Druckkurve durch die äußeren Punkte B und C der Scheitel- und Kämpferfuge, und da sie die einzige sein soll, die ganz innerhalb des Gewölbequerschnittes verläuft, so hat man dem Gewölbe jene Stärke a zu geben, daß die Druckkurve den Intradoskreis berührt. Ist K der Berührungspunkt, so nennt man den Winkel $A\Omega K$ den *Bruchwinkel.*

la formule précédente peut se mettre sous la forme suivante:

$$\log_n \frac{\varrho}{\varrho_0}(ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi) = ar\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi}.$$

Comme cette intégrale paraît irréductible, on voit que les courbes des pressions seront généralement transcendantes dont le tracé, si facile par la géometrie, présentera des complications sérieuses en ayant égard à leurs équations dont la considération devient pour ainsi dire complètement inutile".

2) A. Ritter, Lehrbuch der Ingenieurmechanik. Leipzig 1899.

3) Pilgrim, Theorie der kreisförmigen symmetrischen Tonnengewölbe von konstanter Dicke, die nur ihr eigenes Gewicht tragen. Stuttgart 1877.

Um also für diesen Fall die Stärke a und den Bruchwinkel $A\Omega K$ zu bestimmen, wird man folgendermaßen vorgehen:

Die Gleichung der Druckkurve ist nach früherem

$$(10) \qquad \varrho = \frac{\varrho_0 Q + \frac{1}{6} a(a^2 + 12 r^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{Q \cos\varphi + a r \varphi \sin\varphi},$$

und da die Druckkurve durch die Punkte B und C gehen soll, so wird für $\varphi = 0$

$$(11) \qquad \varrho = r + \frac{a}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \varrho_0 = r + \frac{a}{2},$$

für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$(12) \qquad \varrho = r + \frac{a}{2}, \quad \text{d. h.} \quad Q = \frac{3\pi a r(a + 2r) - a(a^2 + 12 r^2)}{3a + 12 r}.$$

Die Werte für ϱ_0 und Q aus (11) und (12) in (10) eingesetzt:

$$\varrho = \frac{3\pi r(a + 2r)^2 - (a + 2r)(a^2 + 12 r^2)\cos\varphi}{6\pi r(a + 2r)\cos\varphi - 2(a^2 + 12 r^2)\cos\varphi + 12 r(a + 2r)\varphi\sin\varphi}.$$

Setzt man:

$$(13) \qquad \frac{a}{r} = n,$$

so ist

$$\varrho = \frac{r}{2}(n + 2)\frac{3\pi(n + 2) - (n^2 + 12)\cos\varphi}{3\pi(n + 2)\cos\varphi - (n^2 + 12)\cos\varphi + 6(n^2 + 2)\varphi\sin\varphi}.$$

Setzt man außerdem:

$$(14) \qquad 3\pi(n + 2) - (n^2 + 12)\cos\varphi = Z,$$

$$(15) \qquad 3\pi(n + 2)\cos\varphi - (n^2 + 12)\cos\varphi + 6(n^2 + 2)\varphi\sin\varphi = N,$$

so ist:

$$(16) \qquad \varrho = \frac{r}{2}(n + 2)\frac{Z}{N}.$$

Die mathematische Stärke a ist derart zu bestimmen, daß das Minimum von ϱ gleich ist dem Radius des Intradoskreises, d. h.

$$(17) \qquad \text{für} \quad \frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{soll} \quad \varrho = r - \frac{a}{2} = -\frac{r}{2}(n - 2)$$

sein. Diese zwei Gleichungen bestimmen die mathematische Stärke des Gewölbes:

$$a = nr$$

und den Bruchwinkel φ.

Die beiden Gleichungen (17) lauten mit Rücksicht auf (16)

$$(18) \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} = \frac{r}{2}(n + 2)\frac{N\frac{\partial Z}{\partial\varphi} - Z\frac{\partial N}{\partial\varphi}}{N^2} = 0 \quad \text{oder} \quad N\frac{\partial Z}{\partial\varphi} - Z\frac{\partial N}{\partial\varphi} = 0,$$

$$(19) \qquad \varrho = -\frac{r}{2}(n - 2) = \frac{r}{2}(n + 2)\frac{Z}{N} \quad \text{oder} \quad -(n - 2)N = (n + 2)Z.$$

Die Gleichungen (18) und (19) können ersetzt werden durch die Gleichungen:

$$(n + 2)\frac{\partial Z}{\partial\varphi} + (n - 2)\frac{\partial N}{\partial\varphi} = 0,$$

$$(n + 2)Z + (n - 2)N = 0.$$

Durch Einsetzung der Werte für Z und N aus (14) und (15) gelangt man zu den Gleichungen:

$$(20) \qquad 3\pi(n + 2)^2 - (2n^3 - 3\pi n^2 + 24 n + 12\pi)\cos\varphi + 6(n^2 - 4)\varphi\sin\varphi = 0,$$

$$(21) \qquad 6(n^2 - 4)\sin\varphi + (2n^3 - 3\pi n^2 + 24 n + 12\pi)\sin\varphi + 6(n^2 - 4)\varphi\cos\varphi = 0.$$

Wird die Gleichung (20) mit $\sin\varphi$, Gleichung (21) mit $\cos\varphi$ multipliziert und werden beide Gleichungen addiert, so folgt:

$$\pi(n + 2)\sin\varphi + (n - 2)\sin 2\varphi + 2(n - 2)\varphi = 0,$$

woraus:

$$(22) \qquad n = 2\frac{2\varphi + \sin 2\varphi - \pi\sin\varphi}{2\varphi + \sin 2\varphi + \pi\sin\varphi}.$$

Aus der Gleichung (21) folgt:

$$(23) \qquad 2n\frac{n^2 + 12}{n^2 - 4} - 3(\pi - 2) + 6\varphi\,\mathrm{cotg}\,\varphi = 0.$$

Substituiert man den Wert für n aus (22) in die Gleichung (23), so bekommt man eine Gleichung mit der einen Unbekannten φ, woraus man bestimmt:

$$\varphi = 54^0\,29'.^{1)}$$

Dann folgt aus (22)

$$n = \frac{a}{r} = 0{,}1075.$$

Beispiele.

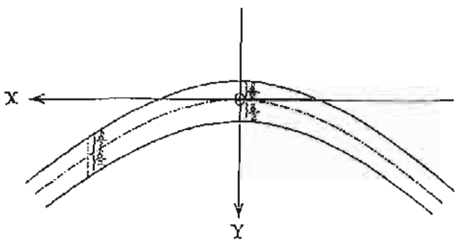
17. Man konstruiere ein unbelastetes Gewölbe, welches den Forderungen genügt: 1. eine seiner Stützlinien falle mit der Gewölbsachse zusammen, 2. die Breite δ der vertikal zu führenden Fugenschnitte sei

1) Ritter gibt an $\varphi = 54^0\,10'$, Pilgrim gibt an $\varphi = 54^0\,27'$. Die Werte für n stimmen bei beiden Autoren mit den unserigen überein.

proportional der zu denselben senkrecht gerichteten Komponente N der Druckkraft R.

Wählt man die Scheitelmitte des Gewölbes zum Ursprung des Koordinatensystems, so ist für $x = 0$

Fig. 9.



$$y = 0, \qquad P = 0, \qquad H = Q$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (19) und (21) des Punktes 7 ist:

$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = 0, \qquad V = \int_{x_0}^{x} \delta\, dx,$$

$$H = Q = N,$$

also

$$\delta = kN = k \cdot Q,$$

wo k eine Konstante bedeutet. Aus diesen Gleichungen folgt:

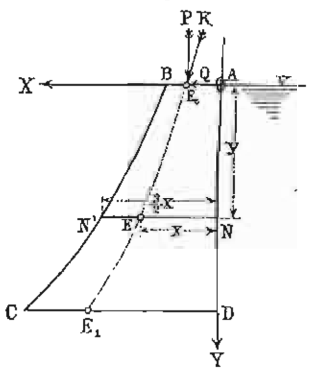
$$k \int_{x_0}^{x} dx = kx = \frac{dy}{dx}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert, wenn man berücksichtigt, daß für $x = 0$, $y = 0$:

$$y = kx^2.$$

Die Gewölbsachse ist also eine Parabel. Die Begrenzungskurven sind kongruente Parabeln, welche gegen die Gewölbsachse vertikal verschoben sind (Asymptotische Parabeln).

Fig. 10.



18. Es stellte $ABCD$ das Profil einer Talsperre dar. Deren hintere Begrenzungslinie AD ist eine vertikale Gerade. Man bestimme die vordere Begrenzungslinie $BN'C$ derart, daß bei gefülltem Becken und Belastung der Krone durch die Last K die Druckkurve durch die linksseitigen Drittelpunkte (Kernpunkte) der horizontal zu führenden Fugenschnitte hindurchgehe.

Legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt A. Ist dann:

$$x = f(y)$$

die Gleichung der Druckkurve, so ist

$$x' = \tfrac{3}{2} f(y)$$

die Gleichung der vorderen Begrenzungslinie.

Das spezifische Gewicht des Talsperre-Materiales sei g; das spezifische Gewicht des Wassers und die Tiefe β des betrachteten Teiles der Talsperre gleich eins. Der spezifische horizontalgerichtete Wasserdruck im Punkte N ist gleich y. Es ist also in den Gleichungen (5), (7) und (8) des Punktes 4 zu setzen:

$$\beta = 1, \quad \delta = \tfrac{3}{2} x, \quad \varrho = \infty, \quad \varrho\, d\varphi = dy, \quad \xi = \tfrac{3}{4} x - x = -\tfrac{1}{4} x,$$

$$\varphi = \tfrac{\pi}{2}, \quad p = 0, \quad q = y, \quad \eta = \tfrac{\pi}{2}, \quad di = dy, \quad y_0 = 0$$

Diese Gleichungen lauten dann:

$$V dx - H dy + \tfrac{3}{8} g x^2 dy = 0.$$

$$V = P + \tfrac{3}{2} g \int_0^y x\, dy,$$

$$H = Q + \int_0^y y\, dy = Q + \tfrac{1}{2} y^2.$$

Werden die Werte für V und H aus den zwei letzten Gleichungen in die vorhergehende eingesetzt und wird diese nach x differentiiert, so gelangt man zur Differentialgleichung der Druckkurve:

$$(8Q - 3gx^2 + 4y^2)\frac{d^2 y}{dx^2} + 8y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 18 g x \frac{dy}{dx} = 0.$$

Es gelang uns nicht, das vollständige Integral dieser Gleichung zu bestimmen. Eines ihrer partikularen Integrale und zwar für die Werte:

$$x_0 = 0, \qquad P = 0, \qquad Q = 0$$

lautet:

$$y = \tfrac{3}{2}\sqrt{g}\, x.$$

Es lautet also die Gleichung der vorderen Begrenzungslinie:

$$y = \sqrt{g}\, x.$$

19. Die soeben gewonnene partikulare Lösung der behandelten Aufgabe zeigt folgende Eigentümlichkeiten:

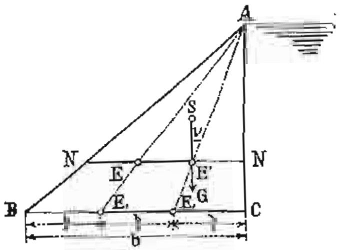
Das Profil der Talsperre ist in diesem Falle ein rechtwinkliges Dreieck ADC, für welches:

$$\operatorname{tang} \sphericalangle CAD = \frac{1}{\sqrt{g}}.$$

Die Druckkurve ist bei gefülltem Becken die Gerade AE_1, wo E_1 im linken Drittelpunkte der Basis DC liegt.

Ist das Becken nicht gefüllt, so daß die Talsperre nur ihrem Eigengewichte unterworfen ist, so geht die Druckkraft G des beliebigen Fugenschnittes NN', d. h. das Gewicht des Dreieckes $NN'A$ durch den rechten Drittelpunkt E' dieses Fugenschnittes. In diesem Falle ist also die Gerade AE_1' die Druckkurve, wobei E_1' im rechten Drittelpunkte der Basis DC liegt.

Fig. 11



Der Winkel ν, den die Druckkraft G eines beliebigen Fugenschnittes mit der Druckkurve einschließt, ist in diesem Falle konstant und gleich:

$$\nu = \sphericalangle CAE_1'.$$

Dieser Winkel kann (unter der Einschränkung $-\frac{\pi}{2} < \nu < \frac{\pi}{2}$) mit der Vergrößerung der Basis CD beliebig groß gemacht werden, was deutlich zeigt, wie fehlerhaft die Annahme ist, daß die Druckkraft die Druckkurve berühre.

20. Hat der Tragkörper solch eine Form, daß der Schwerpunkt des zwischen zwei beliebigen Fugenschnitten eingeschlossenen Teiles und die Mittelpunkte der Belastungen desselben bestimmt werden können, so läßt sich die Gleichung der Druckkurve direkt aufstellen und die Aufstellung ihrer Differentialgleichung kann umgangen werden.

So könnte die Gleichung der Druckkurve des im Punkte 15 behandelten Gewölbes auch wie folgt aufgestellt werden:

Ist (Fig. 7, S. 19) S der Schwerpunkt von $ABN'N$ (x_1 dessen Abszisse), in welchem Punkte man sich das Gewicht V von $ABN'N$ wirkend denken kann, so folgt wegen des Gleichgewichtes des Tragkörperteiles $ABN'N$ die Momentengleichung bezüglich E:

$$V(x - x_1) - Q \cdot y = 0.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist

$$\overline{\Omega S} = \frac{1}{6}\,\frac{a^2 + 12 r^2}{r} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi},$$

und es ist deshalb

$$x_1 = \Omega S \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{6}\,\frac{a^2 + 12 r^2}{r}\,\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\varphi}.$$

Nach den Ableitungen im Punkte 15 ist noch

$$V = a r \varphi, \quad x = \varrho \sin\varphi, \quad y = \varrho_0 - \varrho \cos\varphi.$$

Werden diese Werte in die erste Gleichung eingesetzt, so bekommt man die Gleichung der Druckkurve:

$$\varrho = \frac{\varrho_0 Q + \frac{1}{6} a (a^2 + 12 r^2) \sin^2\frac{\varphi}{2}}{Q \cos\varphi + a r \varphi \sin\varphi}$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung im Punkte 15.