НУМЕРИЧКО ИЗРАЧУНАВАЊЕ СЕКУЛАРНЕ ПУТАЊЕ ЗЕМЉИНИХ ПОЛОВА РОТАЦИЈЕ.

Од

М. МИЛАНКОВИЋА.

НУМЕРИЧКО ИЗРАЧУНАВАЊЕ СЕКУЛАРНЕ ПУТАЊЕ ЗЕМЉИНИХ ПОЛОВА РОТАЦИЈЕ.

Од

М. МИЛАНКОВИЋА.

(Приказано на скупу Академије природних наука, 7 новембра 1932).

Питање да ли се полови Земљини могу у већој мери померати по Земљиној површини, стајало је досада отворено. Док су сва геолошка искуства говорила да су полови, у току Земљине прошлости, морали увелико мењати свој положај, дотле егзактне науке нису биле у стању да на то питање позитивно одговоре, поред свих напора који су у том правцу чињени. О тим покушајима и њиховим неуспеху говорио сам опширније у једном одељку Гутенберговог Приручника Геофизике, о којем ће одмах бити реч.

Потреба да се питање о могућности померања Земљиних полова и о механизму тога померања једном дефинитивно реши, постајала је из дана у дан све актуелнија. На ту потребу ме је први упозорио покојни немачки научник Вегенер са којим сам се, после првог нашег састанка у Инсбруку, 1924 године, неколико пута састао, за време летњих распуста, у Грацу. На тим састанцима, ми смо много расправљали о томе проблему, и ја сам се, том приликом, упознао са многим геофизикалним чињеницама које су математичарима мање познате, а потребне за решавање постављеног питања. Обећао сам Вегенеру, који није био довољно математичар, да ћу, чим доспем, покушати да тај проблем, узимајући у обзир све те новије тековине геофизике, математски формулишем и, по могућности, решим, али су ме други послови дуго времена у томе спречавали. Па и када ме је, новембра 1927, позвао Гутенберг, онда још професор Универзитета у Дармштату, а сада професор Универзитета у Пазадени, на сарадњу на његовом Приручнику Геофизике, ја сам, заузет обрадом моје математске теорије климе и астрономске теорије ледених доба, за Кепен-Гајгерово дело, спочетка одбио тај позив. Но, срећом по мене, Гутенберг није хтео да прими мој отказ, изјављујући да ће променити распоред и термине публикације појединих одељака његовог дела, само да осигура моју сарадњу на њему. Он је, међу осталим партијама свога приручника које ми је на обраду наменио, предвидео и споменуто питање о секуларним померањима Земљиних полова. Ја сам, желећи да испуним обећање које сам дао Вегенеру, напослетку пристао да се примим понуђене сарадње.

Преузети посао изискивао је велике напоре. Иако су ми моје колеге, професори Билимовић и Жардецки, својим расправама, израђеним на мој позив, пружили драгоценога материјала за многа претходна питања, пошло ми је за руком да тек почетком ове године питање о померању полова дефинитивно решим и изведем диференцијалну једначину тога кретања. Како је Гутенберг са нестрпљењем очекивао давно обећани одељак, то сам га довршио што сам пре могао, а у исто време спремио за нашу Академију расправу о тој ствари. Та оба чланка су до сада изашла из штампе [1], а сем тога и један мањи чланак о истом питању [2], у којем сам извршио интегрисање споменуте диференцијалне једначине.

У тима расправама изложена је теорија померања Земљиних полова, а у другој од њих и цео историјат тога питања, са анализом и критиком радова који су његовом садањем решењу претходили. Нумеричко израчунавање путање пола оставио сам, у споразуму са Гутенбергом, са којим сам се овога лета састао у Бечу, за публикацију у осмом тому његовога приручника. То сам нумеричко израчунавање баш сада довршио, па желим да га, пре но шта га публикујем на страни, саопштим Академији.

---

[1] Миланковић, Секуларна померања Земљиних полова ротације. Глас Српске краљевске академије CLII 1932.

Milankovitch, Säkulare Polwanderungen. Gutenbergs Handbuch der Geophysik. Band I. Abschnitt VII. Berlin 1932

[2] Milankovitch, Bahnkurve der säkularen Polverlagerung. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. Tome I. 1932.

§ 1. *Основне чињенице и једначине.* У поменутим расправама показао сам да се, услед изостатског налегања сиалног покривача Земљиног на његовој флуидалној подлози, Земљини полови ротације морају секуларно померати, а да је то померање једнозначно одређено следећом векторском једначином

$$(1) \qquad \mathfrak{v} = \frac{\chi}{2(C-A)} \operatorname{grad} \Omega \, .$$

У овој једначини исписана је цела историја померања Земљиних полова, па ћемо сада да је прочитамо.

У једначини (1) претставља $\mathfrak{v}$ вектор брзине померања полова, од којих је довољно уочити само северни, јер је положај јужнога, природно, увек антиподан северном. C и A су главни моменти инерције Земље, а Ω је моменат инерције сиалног покривача Земљиног обзиром на осу која пролази кроз центар Земље и уочену тачку путање пола. При одређивању тога момента ваља водити рачуна и о дефекту маса које је сиални покривач истиснуо из своје флуидалне подлоге. χ је константа, названа коефициентом прилагођивања.

Путања пола ротације је, као што то следује из једначине (1), једна од векторских линија поља grad Ω, па њена одредба следује из самог тог поља и садашњег положаја Земљиног пола у њему. Тек при испитивању кретања пола по тој путањи, долазе константе C, A, χ, спојене у једну јединицу, у обзир. Зато је изналажење путање пола ротације један чисто геометријски проблем у којем долази у обзир само конфигурација сиалног покривача Земљиног.

Да бисмо тај проблем решили, положимо у центар Земље почетак ортогоналног координатног система $X—Y—Z$ којега је оса Z наперена према садањем положају северног пола, а којега оса X лежи у гриничком меридијану, па означимо ли са r геоцентрично отстојање, са φ геоцентричну ширину, а са ψ географску дужину произвољне тачке M Земљине љуске, то су координате x, y, z те тачке обзиром на одабрани координатни систем претстављене изразима

$$(2) \qquad x = r \cos\varphi \cos\psi ; \quad y = r \cos\varphi \sin\psi ; \quad z = r \sin\varphi \, .$$

Уочимо елеменат сиалног покривача Земљиног, т. ј. вертикалну призму ограничену меридијанима ψ и $(\psi d+\psi)$, а упоредницима φ и $(\varphi+d\varphi)$, па означимо са μ масу сиалног покривача по јединици хоризонталне површине, то је маса dm уоченог елемента сиалног покривача претстављена изразом

$$dm=\mu df=\mu r^2 \cos\varphi \; d\varphi \; d\psi . \tag{3}$$

Дебљина сиалног покривача на уоченом месту, т. ј. висина елементарне призме нека буде D, а ρ густина сиала, онда је

$$\mu=\rho D . \tag{4}$$

Када би густина ρ сиала и густина мора и сиалног морског дна била свугде једнака густини ρ_0 симе, онда би Земља била ограничена глатком површином једног ротационог елипсоида који смо у споменутим расправама назвали унутрашњим елипсоидом референције. Главни моменти инерције тако замишљене Земље могу се, због тога што је сиална љуска Земљина веома танка и што се ради само о разлици тих момената, идентификовати са главним моментима инерције Земљинога тела, којих је разлика одређена великом тачности из појаве прецесије и других астрономских опажања.

Неједнакост густине ρ и ρ_0 има за последицу да сиалне санте континената стрче високо изнад морског дна. Та неправилност Земљинога лица, узрок померању полова, оличена је у једначини (1) градиентом момента инерције сиалног покривача. Када би сиална љуска имала свугде исту дебљину и густину, то би градиенат био једнак нули, померања полова не би било.

Аналитични израз за Ω извешћемо овако. Замислимо прво сиални покривач кондензован на густину ρ_0 симе и уочимо на географским координатама φ и ψ вертикалну елементарну призму тако кондензованог сиалног покривача која има за базу јединицу површине; та јединица нека буде тако одабрана да је веома мала према целокупној површини Земље. Тежиште A те призме нека има координате x, y, z обзиром на наш координатни систем $X—Y—Z$. Моменти инерције и моменти девијације ове елементарне призме обзиром на осе X, Y, Z претстављени су изразима

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \Delta I_1=\mu\,(y^2+z^2); & \Delta I_2=\mu\,(z^2+x^2); & \Delta I^3=\mu\,(x^2+y^2), \\ \Delta\Lambda_1=\mu yz ; & \Delta\Lambda_2=\mu zx ; & \Delta\Lambda_3=\mu xy . \end{array} \right.$$

Ови се изрази не мењају ако се у њима спроведе супституција

$$x|—x ; \quad y|—y; \quad z|—z ,$$

а то значи да се моменти инерције и девијације не мењају ако се масе Земљиног покривача помере антиподно. Зато је, при израчунавању тих момената, дозвољено послужити се планиглобом антипода, што ћемо и учинити.

Употребимо ли једначине (2), то добивамо:

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_1=\mu r^2 (\cos^2\varphi \, \sin^3\psi+\sin^2\varphi); \\ \qquad \Delta I_2=\mu r^2 (\sin^2\varphi+\cos^2\varphi \, \cos^2\psi); \quad \Delta I_3=\mu r^2 \cos^2\varphi \\ \Delta\Lambda_1=\mu r^2 \sin\varphi \, \cos\varphi \, \sin\psi ; \\ \qquad\qquad \Delta\Lambda_2=\mu r^2 \sin\varphi \, \cos\varphi \, \cos\psi ; \\ \qquad\qquad\qquad \Delta\Lambda_3=\mu r^2 \cos^2\varphi \, \sin\psi \, \cos\psi . \end{array} \right.$$

Означимо ли висину кондензоване елементарне призме са H, то је, према принципу кондензације,

$$\rho_0 H=\rho D . \tag{7}$$

Замислимо сада да смо уочену елементарну призму истегли опет на њену праву густину ρ, и да смо то учинили на целој Земљиној површини, вративши овој њен прави изглед. Тим истезањем и тим померањем маса у вертикалном правцу промениће се, пре свега, облик унутрашњег елипсоида референције, који је био једна еквискаларна површина потенцијала гравитације, али су промене те гравитационе површине, као што ћемо ускоро доказати, тако незнатне да се не морају узети у обзир према променама које настају на следећи начин. Услед враћања сиалне призме на њену стварну густину, дићиће се њено тежиште из положаја B у положај S и то, као што је лако увидети, за дужину

$$z_0=\frac{1}{2}\,(D-H), \tag{8}$$

што ће имати за последицу да ће се моменти ΔI и $\Delta \Lambda$ променити за

$$\frac{\partial \Delta J}{\partial r} z_0; \quad \frac{\partial \Delta \Lambda}{\partial r} z_0.$$

Део сиалног покривача Земљиног који лежи на површини df изазива својим стрчањем изнад унутрашњег елипсоида референције ове промене момената инерције и момената девијације према моментима кондензованог и елипсоидом референције ограниченог Земљиног тела

$$(9) \quad \begin{cases} dI_1 = 2\mu r^3 z_0 (\cos^2\varphi \sin^2\psi + \sin^3\varphi) \cos\varphi \, d\varphi \, d\psi \,, \\ dI_8 = 2\mu r^3 z_0 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cos^2\psi) \cos\varphi \, d\varphi \, d\psi \,, \\ dI_3 = 2\mu r^3 z_0 \cos^3\varphi \, d\varphi \, d\psi \,. \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} d\Lambda_1 = 2\mu r^3 z_0 \sin\varphi \cos^2\varphi \sin\psi \, d\varphi \, d\psi \,, \\ d\Lambda_2 = 2\mu r^3 z_0 \sin\varphi \cos^2\varphi \cos\psi \, d\varphi \, d\psi \,, \\ d\Lambda_3 = 2\mu r^8 z_0 \cos^3\varphi \sin\psi \cos\psi \, d\varphi \, d\psi \,. \end{cases}$$

Целокупно дејство присуства сиалног покривача добива се интегрисањем предњих израза широм целог тог покривача. При томе ваља имати у виду ово. Зависност радиусвектора r од геоцентричне ширине φ претстављена је изразом

$$(11) \quad r = a (1 - \nu \sin^3\varphi) \,,$$

где a означава радиус екватора, а ν спљоштеност Земље. Ова је округло

$$(12) \quad \nu = \frac{1}{300} \,.$$

Како је ν мален број, то се, употребом биномског обрасца и занемаривањем виших потенција од ν, добива

$$(13) \quad r^3 = a^3 (1 - 3\nu \sin^2\varphi) \,.$$

Ваљало би, дакле, овај израз ставити у (9) и (10), па интегрисање извршити, но како други члан заграде израза (13) достиже због (12) у максимуму вредност од једног процента првог члана, то се, занемарујући приликом споменутог интегрисања тај други члан, чини у коначном резултату грешку мању од једног процента. Имајући у виду да смо о

конфигурацији и местимичној дебљини сиалног покривача Земљиног доста површно информисани, то споменута грешка не долази уопште у обзир, а још мање она која је учињена не водећи рачуна о споменутој промени еквипотенцијалних површина и унутрашњег елипсоида референције. Зато можемо други члан у загради у (13) занемарити, а учињену незнатну грешку још више умањити ако место екватеријалног радиуса a ставимо средњи радиус Земље r_0, другим речима ако ставимо

$$(14) \quad r = r_0 \,.$$

Чинећи то и стављајући

$$(15) \quad 2\mu r_0^3 r = c \,,$$

добивамо

$$(16) \quad \begin{cases} dI_1 = c (\cos^3\varphi \sin^2\psi + \sin^2\varphi \cos\varphi) \, d\varphi \, d\psi \,, \\ dI_2 = c (\sin^2\varphi \cos\varphi + \cos^3\varphi \cos^2\psi) \, d\varphi \, d\psi \,, \\ dI_3 = c \cos^3\varphi \, d\varphi \, d\psi \,, \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} d\Lambda_1 = c \sin\varphi \cos^2\varphi \sin\psi \, d\varphi \, d\psi \,, \\ d\Lambda_2 = c \sin\varphi \cos^2\varphi \cos\psi \, d\varphi \, d\psi \,, \\ d\Lambda_3 = c \cos^8\varphi \sin\psi \cos \, d\varphi \, d\psi \,. \end{cases}$$

Интегришући ове изразе преко целе Земљине површине добивају се моменти инерције I_1, I_2, I_3 и моменти девијације Λ_1, Λ_2, Λ_3 сиалног покривача Земљиног обзиром на одабрани координатни систем.

§ 2. *Утицај континената, мора и морскога дна.* Немогуће је све неправилности Земљине љуске узети у обзир при следећим рачунањима, тим мање што смо о конфигурацији и дебљини Земљиног сиалног покривача недовољно извештени. Зато се морамо задовољити тим да само главне од тих неправилности ставимо у рачун. Оне се испољавају у очигледној разлици континената и мора. Због тога ћемо Земљину површину рашчланити у оне њене делове који су покривени континентима, рачунајући у ове и плићаке мора до 200 м дубине, и оне које су покривени морима. При томе ћемо површине континената и дна морска замислити уравњена, т. ј. рачунати са средњом висином h континената изнад мора и са средњом дубином t мора.

Вегенер је, у својој теорији померања континената, био претпоставио да је сиални покривач углавном ограничен на континенталне плоче, а да се на дну океана већ појављује сима. Кад бисмо усвојили ту претпоставку, требало би предње интеграле ограничити само на континенте. Да бисмо обухватили општији и, као што ћемо видети, стварнији случај, ми ћемо претпоставити да је и дно мора сграђено од сиала. О деблини сиалног покривача на континентима односно под морем не чинимо друга ограничења сем, као што је већ речено, та да континенталне плоче имају исту дебљину D_1, а исто тако да је сиално дно океана свугде једнако дебело и има дебљину D_2. Услед тога добићемо у изразима (16) и (17) две разне вредности за коефициенат c, ону за континенте који ћемо означити са c_1 и ону за мора коју ћемо означити са c_2. Питајмо у којем односу стоје те две вредности једна према другој.

Означимо ли отстојање површине мора од нивоске површине симе, т. ј. од површине унутрашњег елипсоида референције са f, а са H_1 дубину до које је континентална плоча утонула у симу, то је, пошто смо са h означили надморску висину континента,

$$D_1 = H_1 + f + h\,. \tag{18}$$

Због (8), (4) и (7) имамо

$$z_0 = \frac{1}{2}\,(D_1 - H_1)\,, \tag{19}$$

$$\mu_1 = \rho_1 D_1\,, \tag{20}$$

$$\rho_0 H_1 = \rho_1 D_1\,, \tag{21}$$

где ρ_1 означава средњу густину континенталне плоче.

Коефициенат c претстављен је, у овом случају, због (15), изразом

$$c_1 = (D_1 - H_1)\,\rho_1 D_1 r_0^{\,3}\,, \tag{22}$$

т. ј. због (21) са

$$c_1 = \rho_0\,\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1}\,H_1^{\,2} r_0^{\,3}\,. \tag{23}$$

Означујући са h_1 висину горње површине континенталне плоче изнад нивоа симе, т. ј. стављајући

$$h_1 = f + h \tag{24}$$

добивамо због (18)

$$D_1 = H_1 + h_1\,, \tag{25}$$

т. ј. због (21) и (23)

$$c_1 = r_0^{\,3}\,\frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_0 - \rho_1}\,h_1^{\,2}\,. \tag{26}$$

На океанима имамо овај случај. Означимо са H_2 дубину за коју је сиални покривач дебљине D_2 уронио у симу, то је, пошто смо са t означили средњу дубину мора,

$$H_2 + f = D_2 + t\,. \tag{27}$$

Ако са ρ_2 означимо средњу густину сиалног покривача испод мора, која не мора бити једнака густини ρ_1 континенталних плоча, то следује, стављајући за густину морске воде единицу, из услова хидростатске равнотеже,

$$\rho_2 D_2 + t = \rho_0 H_2\,. \tag{28}$$

Замислимо да смо море кондензовали на густину ρ_2 сиалног покривача, онда би његова дубина t_2 била

$$t_2 = \frac{1}{\rho_2}\,t\,, \tag{29}$$

а дебљина D_2 кондензованим морем појачаног сиалног покривача

$$D_r = D_2 + t_2\,, \tag{30}$$

па бисмо место (28) добили ову једначину

$$\rho_0 H_2 = \rho_2 D_r\,. \tag{31}$$

Она је истог облика као и једначина (21).
У овом је случају

$$\mu_2 = \rho_2 D_2 + t = \rho_2 D_r\,. \tag{32}$$

Означимо са h_3 висину горње површине кондензованога мора изнад нивоа симе, то је

$$D_r = H_2 + h_2\,, \tag{38}$$

па бисмо за c_2 добили исти израз као (26), у којем би индекс 1 ваљало само заменити са 2.

Враћајући мору његову праву густину, диже се његово тежиште за

$$z = \frac{1}{2}\,(t - t_2)$$

а како је његова маса по јединици хоризонталне површине једнака t, то треба c_2, према (15), увећати још за

$$r_0{}^3\,(t - t_2)\,t = r_0{}^2\,\frac{\rho_2 - 1}{\rho_2}\,t^2$$

због чега добивамо за c_2 овај израз

$$c_2 = r_0{}^3\,\frac{\rho_0\rho_2}{\rho_0 - \rho_2}\,h_2{}^2 - r_0{}^3\,\frac{\rho_2 - 1}{\rho_2}\,t^2\,. \tag{34}$$

Коефициенти c_1 и c_2 повезани су међусобно овом релацијом. Рачунајући плићаке у континенте и истежући континенталне плоче толико да се ослободе својих главних набора, може се за средњу надморску висину континенталних плоча (види Gutenberg, Handbuch der Geophysik, Bd. II стр. 560) ставити округло $h = 0{,}3$ km, а за средњу дубину мора (од којих треба одузети плићаке) $t = 4$ km. За редуковану дубину мора можемо, стављајући $\rho_2 = 3{,}1$, ставити $t_2 = \dfrac{4{,}0}{3{,}1} = 1{,}3$ km, па зато добивамо да горња површина континенталних плоча стоји за $1{,}3 + 0{,}3 = 1{,}6$ km више од редукованог нивоа мора. Зато је, према употребљеним ознакама,

$$h_1 = h_2 + 1{,}6 \text{ km}\,. \tag{35}$$

Можемо, дакле, једну од величина h_1 или h_2 елиминисати из израза (26) и (34) и на тај начин добити тражену везу.

За сада је најважније питање која је од величина c_1 и c_2 већа, т. ј. да ли утицај континенталног сиалног покривача на величине I и Λ већи или онај сиалног морскога дна заједно са морем. Та два утицаја су међусобно једнака кад буде због (23), (34) и (35), задовољена једначина

$$\frac{\rho_0\rho_1}{\rho_0 - \rho_1}\,h_1{}^2 = \frac{\rho_0\rho_2}{\rho_0 - \rho_2}\,(h_1 - 1{,}6)^2 + \frac{\rho_2 - 1}{\rho_2}\,t^2\,. \tag{36}$$

Ова једначина може, за свако h_1 које лежи у границама стварности, бити задовољена ако је ρ_1 довољно блиско ρ_0. Да такво решење лежи у границама које смо у споменутој расправи утврдили за нумеричке вредности величина ρ_0, ρ_1, h_1 показаћемо на једном конкретном примеру. Ставимо $\rho_0 = 3{,}3$; $\rho_1 = 2{,}8$; $D_1 = 30$ km, онда је, због (21) и (25), $h_1 = 4{,}5$ km па добивамо помоћу предње једначине $\rho_2 = 3{,}02$, што лежи потпуно у границама могућности. Због тога су сва три случаја

$$c_1 > c_2; \quad c_1 = c_2; \quad c_1 < c_2$$

могућа и зато ћемо их у наредним испитивањима сва три дозволити. Коначни резултат наших испитивања ће одлучити који од тих случајева ваља прихвати.

§ 3. *Моменти инерције сиалног покривача Земљиног.*

Пошто су решена претходна питања, можемо приступити одређивању момената инерције сиалног покривача Земљиног. Уочимо сферни четвороугао тог покривача који је ограничен меридијанима ψ' и ψ'', а упоредницима φ' и φ''. Нека у целом том четвороуглу сиални покривач има исту дебљину и густину, онда су μ и z_0 такође константе, па према томе и c. Зато ће се приноси тог дела сиалног покривача моментима инерције I и моментима девијације Λ израчунати интеграцијом израза (16) и (17) између горе означених граница. Ти ће приноси бити, према томе, претстављени следећим изразима:

$$\left\{\begin{aligned}
I_1 &= c\left[\frac{1}{2}(\psi'' - \psi') - \frac{1}{4}(\sin 2\psi'' - \sin 2\psi')\right]\Big[(\sin\varphi'' - \sin\varphi') - \\
&\qquad - \frac{1}{3}(\sin^3\varphi'' - \sin^3\varphi')\Big] + c\,\frac{1}{3}(\psi'' - \psi')(\sin^3\varphi'' - \sin^3\varphi') \\
I_2 &= c\left[\frac{1}{2}(\psi'' - \psi') + \frac{1}{4}(\sin 2\psi'' - \sin 2\psi')\right]\Big[(\sin\varphi'' - \sin\varphi') - \\
&\qquad - \frac{1}{3}(\sin^3\varphi'' - \sin^3\varphi')\Big] + c\,\frac{1}{3}(\psi'' - \psi')(\sin^3\varphi'' - \sin^3\varphi') \\
I_3 &= c\,(\psi'' - \psi')\left[\sin\varphi'' - \sin\varphi') - \frac{1}{3}(\sin^3\varphi'' - \sin^3\varphi')\right]
\end{aligned}\right. \tag{37}$$

$$(38)\quad \begin{cases} \Lambda_1 = \frac{c}{3}\,(\cos\psi''-\cos\psi')\,(\cos^3\varphi''-\cos^3\varphi')\,, \\ \Lambda_2 = -\frac{c}{3}\,(\sin\psi''-\sin\psi')\,(\cos^3\varphi''-\cos^3\varphi')\,, \\ \Lambda_3 = -\frac{c}{4}\,(\cos 2\psi''-\cos 2\psi')\,[(\sin\varphi''-\sin\varphi')- \\ \qquad\qquad -\frac{1}{3}\,(\sin^3\varphi''-\sin^3\varphi')]\,. \end{cases}$$

Када би целокупна Земљина површина била покривена морем једнаке дубине t, а сиално дно мора имало свугде исту дебљину D_1, онда би, према (15), c било константно па би у предње обрасце требало ставити $c=c_2$; $\psi'=0$; $\psi''=2\pi$: $\varphi'=-\frac{\pi}{2}$; $\varphi''=+\frac{\pi}{2}$, те би се, на тај начин, добило

$$(39)\quad \begin{cases} I_2=I_2=I_3=\frac{8}{3}\,\pi c_2\,, \\ \Lambda_1=\Lambda_2=\Lambda_3=0\,. \end{cases}$$

Присуство континената мења ову слику. На онима местима Земљине површине где се континенти налазе, ваља у предње интеграле место c_2 ставити c_1. Због тога треба предње величине I и Λ увеличати за интеграле (37), (38) израза (16) и (17), вршећи интеграцију преко свих оних делова Земљине површине који су покривени континентима, а стављајуће у те интеграле место c коефициенат (c_2-c_1), пошто је принос c_1 већ обухваћен у изразима (39). Означавајући, према томе, те интеграле, ако у њих ставимо $c=1$ са i_1, i_2, i_3, λ_1, λ_2, λ_3, то добивамо за моменте инерције и моменте девијације целокупног сиалног покривача Земљиног ове обрасце

$$(40)\quad \begin{cases} I_1=\frac{8}{3}\,\pi c_2+(c_1-c_2)\,i_1\,, \\ I_2=\frac{8}{3}\,\pi c_2+(c_1-c_2)\,l_2\,, \\ \quad\ 8 \end{cases}$$

$$(41)\quad \begin{cases} \Lambda_1=(c_1-c_2)\,\lambda_1\,, \\ \Lambda_2=(c_1-c_2)\,\lambda_2\,, \\ \Lambda_3=(c_1-c_2)\,\lambda_3\,. \end{cases}$$

При томе зависе величине i_1, i_2, i_3, λ_1, λ_2, λ_3 само од хоризонталних контура континената.

Моменат инерције Ω сиалног покривача Земљиног обзиром на осу која пролази кроз центар Земље, а у тачки φ, ψ продире њену површину, претстављен је, као што је у споменутим расправама показано, обрасцем

$$(42)\quad \begin{aligned} \Omega=I_1\cos^2\varphi\cos^2\psi+I_2\cos^2\varphi\sin^2\psi=I_3\sin^2\varphi- \\ -\Lambda_1\sin 2\varphi\sin\psi-\Lambda_2\sin 2\varphi\cos\psi-\Lambda_3\cos^2\varphi\sin 2\psi\,. \end{aligned}$$

Тим је одређено поље скалара Ω и његовог градиента.

§ 4. Главне осе инерције сиалног покривача Земљиног. За одређивање секуларне путање полова ротације од важности је познавати положај главних оса инерције сиалног покривача. То су оне осе за које је

$$\Lambda_1=\Lambda_2=\Lambda_3=0,$$

т. ј. због (41), за које је

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0\,.$$

То значи да се главне осе инерције целокупног сиалног покривача Земљиног поклапају са главним осама инерције које добивамо ако само континентални покривач Земљин узмемо у обзир.

Положај тих главних оса инерције одредићемо најједноставније на овај начин. У главним осама инерције достижу моменти инерције своје екстремне вредности, зато ће координате φ и ψ тачака у којима те осе продиру Земљину површину бити корени ових двеју једначина

$$(43)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}=0\,;\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\psi}=0\,.$$

Применивши образац (42), добивамо место горњих ове две једначине

$$(44)\quad\begin{cases} \operatorname{tang} 2\varphi = \dfrac{2\Lambda_1 \sin\psi + 2\Lambda_2 \cos\psi}{I_3 - \frac{1}{2}(I_1+I_2) - \frac{1}{2}(I_1-I_2)\cos 2\psi + \Lambda_3 \sin 2\psi} \\[2ex] \operatorname{tang} \varphi = \dfrac{(I_1-I_2)\sin 2\psi + 2\Lambda_3 \cos 2\psi}{2\Lambda_2 \sin\psi - 2\Lambda_1 \cos\psi}\;, \end{cases}$$

т. j. због (40) и (41)

$$(45)\quad\begin{cases} \operatorname{tang} 2\varphi = \dfrac{2\lambda_1 \sin\psi + 2\lambda_2 \cos\psi}{i_3 - \frac{1}{2}(l_1+i_2) - \frac{1}{2}(i_1-i_2)\cos 2\psi + \lambda_3 \sin 2\psi} \\[2ex] \operatorname{tang} \varphi = \dfrac{(l_1-i_2)\sin 2\psi + 2\lambda_3 \cos 2\psi}{2\lambda_2 \sin\psi - 2\lambda_1 \cos\psi}\;. \end{cases}$$

Корени φ и ψ једначина (45) могу се најједноставније одредити графичким путем, нацртавши обе криве претстављене предњим једначинама, па измеривши координате тачака у којима се те криве секу. Тачност добивеног резултата може се, према потреби, појачати аналитичким израчунавањем тих пресека.

Једначине (44) даће у интервалу $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$; $0 < \varphi < < 2\pi$ 6 пари коренова за φ и ψ. Нека φ_1 и ψ_1 претставља један такав пар, онда је моменат инерције сиалног покривача обзиром на једну такву главну осу претстављен због (40), (41), (42) обрасцем

$$\Omega_1 = \frac{8}{3}\pi c_2 + (c_1 - c_2)\,[i_1 \cos^2\varphi_1 \cos^2\psi_1 + i_2 \cos^2\varphi_1 \sin^2\psi_1 +$$
$$+ i_3 \sin^2\varphi_1 - \lambda_1 \sin 2\varphi_1 \sin\psi_1 - \lambda_2 \sin 2\varphi_1 \cos\psi_1 -$$
$$-\lambda_3 \cos^2\varphi_1 \sin 2\psi_1].$$

Члан у ћошкастој загради претставља моменат инерције континенталних плоча обзиром на исту осу која је, као што смо видели, и за континентални покривач једна од главних оса. Означимо ли главне моменте инерције целокупног сиалног покривача са Ω_1, Ω_2. Ω_3, а за a, b, c главне моменте инерције континенталног покривача, то је

$$(46)\quad\begin{cases} \Omega_1 = \frac{8}{3}\pi c_2 + (c_1 - c_2)\,a\,, \\[1ex] \Omega_2 = \frac{8}{3}\pi c_2 + (c_1 - c_2)\,b\,, \\[1ex] \Omega_3 = \frac{8}{3}\pi c_3 + (c_1 - c_2)\,c\,. \end{cases}$$

Од међусобног односа величина c_1 и c_2 зависиће да ли се оса максималног момента инерције сиалног покривача Земљиног поклапа са осом максималног или осом минималног момента инерције континенталних плоча Земљине сфере.

§ 5. Опште особине секуларне путање полова ротације. Из једначине (1) следује да вектор брзине којом се пол помера по Земљиној површини пада у правац градиента поља Ω, а то значи да је путања пола векторска линија поља grad Ω. Одатле следују ове опште особине такве путање. Положимо у центар Земље почетак ортогоналног координатног система X—Y—Z и заокренимо овај тако да се његове осе подударају са главним осама инерције целокупног сиалног покривача Земљиног; при томе нека се оса X подудари са осом најмањега момента инерције, а оса Z највећега момента инерције, нека, дакле, буде

$$(47)\qquad \Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3\,.$$

Иначе су, као што ћемо видети, Ω_1, Ω_2, Ω_3 истога реда величина.

Ако са Φ и Ψ означимо поларне координате обзиром на овај нови координатни систем при чему нека Φ игра улогу географске ширине, а Ψ географске дужине, то је моменат инерције сиалног покривача обзиром на осу која, пролазећи кроз центар Земље, продире у тачки Φ, Ψ њену површину, претстављен, према (42) овим изразом

$$(48)\qquad \Omega = \Omega_1 \cos^2\Phi \cos^2\Psi + \Omega_2 \cos^2\Phi \sin^2\Psi + \Omega_3 \sin^2\Phi\,,$$

јер су моменти девијације Λ_1, 1_2, Λ_3 обзиром на главне осе инерције једнаки нули. Овај израз претставља нам аналитички сферно поље скалара Ω. Векторске линије поља grad Ω, којој категорији припада и секуларна путања пола, су ортогоналне трајекторије еквискаларних линија од Ω.

Таква једна еквискаларна линија претстављена је једначином

$$\Omega_1 \cos^2 \Phi \cos^2 \Psi + \Omega_2 \cos^2 \Phi \sin^2 \Psi + \Omega_3 \sin^2 \Phi = C \,, \tag{49}$$

где C има једну одређену вредност.

Поље скалара Ω је, пошто је горњи израз инваријабилан према супституцији $\Phi \mid -\Phi$; $\Psi \mid -\Psi$; $\Psi \mid 180^0 - \Psi$, симетрично обзиром на координатне равни $X-Y$; $Y-Z$; $Z-X$, због чега је довољно испитати природу тога поља у октанту Земљине површине заузетим правоугоним сферним троуглом ABC којега врхови леже у оним тачкама где позитивне гране координатних оса X, Y, Z продиру Земљину сферу.

Да бисмо добили општу слику о току еквискаларних линија поља Ω и њихових ортогоналних трајекторија, т. ј. векторских линија поља grad Ω, испитајмо, пре свега, ток тих линија у околини тачака A, B, C.

Положимо кроз тачку A тангенцијалну раван на Земљину сферу и фиксирајмо у тој равни ортогонални координатни систем којега почетак лежи у тачки A, којега оса x тангира страну AB, а оса y страну AC сферног троугла ABC. У непосредној околини тачке A можемо поље Ω сматрати за равно, а за координате x, y произвољне његове тачке, мерећи их у лучној мери, ставити $x = \Psi$; $y = \Phi$. Пошто су Φ и Ψ веома мале величине, то је дозвољено ставити $\sin^2 \Phi = y^2$; $\cos^2 \Phi = 1 - y^2$; $\sin^2 \Psi = x^2$; $\cos^2 \Psi = 1 - x^2$. Стављајући ово у једначину (49), занемарујући више потенције величина x и y, те уводећи нову константу C, добивамо

$$\frac{x^2}{\Omega_3 - \Omega_1} + \frac{y^2}{\Omega_2 - \Omega_1} = C \tag{50}$$

као једначину еквискаларних линија. То је рој хомотетских елипса којих велике осе леже, због (47), у оси x, т. ј. у страни AB сферног троугла ABC. Диференцијацијом ове једначине, смањивањем y' са $-\frac{1}{y'}$, па интегрисањем исте, добивамо следећу једначину ортогоналних трајекторија горњих

$$y = C x^{\frac{\Omega_3 - \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1}} \tag{51}$$

при чему је због (47)

$$\frac{\Omega_3 - \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1} > 1 \,.$$

Ове трајекторије су рој парабола које све пролазе кроз тачку A, а додирују страну AB сфернога троугла ABC.

У околини тачке B имамо ову слику. Уводећи равни координатни систем којега оса x тангира страну BA, а оса y страну BA сфернога троугла ABC, добивамо $x = \frac{\pi}{2} - \Psi$; $y = \Phi$. Стављајући ово у (49) и развијајући као напред у ред, добивамо за еквискаларне линије ову једначину

$$\frac{x^2}{\Omega_3 - \Omega_1} - \frac{y^2}{\Omega_3 - \Omega_1} = C \,. \tag{52}$$

Ове криве су хиперболе, а њихове ортогоналне трајекторије претстављене су једначином

$$y = C x^{-\frac{\Omega_3 - \Omega_2}{\Omega_2 - \Omega_1}} \,. \tag{53}$$

Како је сада експонент негативан, то ове криве, сем двеју, не пролазе кроз тачку B.

Да испитамо још ток еквискаларних крива и њихових трајекторија у околини тачке C, положимо кроз ту тачку осе x и y координатног система од којих прва тангира страну CA, друга страну CB сферног троугла ABC. Онда је, уводећи место координате Φ њен комплеменат Δ, за околину тачке C $x = \Delta \cos \Psi$; $y = \Delta \sin \Psi$, или због малога Δ,

$$x = \sin \Delta \cos \Psi = \cos \Phi \cos \Psi; \quad y = \cos \Phi \sin \Psi;$$

$$x^2 + y^2 = \Delta^2 = \sin^2 \Delta = 1 - \sin^2 \Phi \,.$$

Уводећи ово у (49) и развијајући у ред, добивамо

$$\frac{x^2}{\Omega_3 - \Omega_2} + \frac{y^2}{\Omega_3 - \Omega_1} = 1 \tag{54}$$

као једначину еквискаларних линија; то су хомотетске елипсе којих велике осе леже, пошто је $\Omega_3-\Omega_1>\Omega_3-\Omega_2$, у оси y, т. ј. у страни BC сфернога троугла ABC. Њихове ортогоналне трајекторије су параболе

$$y=Cx^{\frac{\Omega_3-\Omega_2}{\Omega_3-\Omega_1}}. \tag{55}$$

Све ове линије пролазе кроз тачку C и ту тангирају, пошто је $\Omega_3-\Omega_2<\Omega_3-\Omega_1$, осу y т. ј. страну BC сферног троугла ABC.

Из напред изложеног следује да све ортогоналне трајекторије еквискаларних линија поља Ω, т. ј. све векторске линије поља grad Ω, пролазе кроз тачку A сферног троугла ABC. Како, у тој тачки, Ω достиже свој минимум, то су те линије наперене из те тачке. Полазећи из те тачке, те линије додирују страну AB сферног троугла ABC, а свршавају у тачки C, кроз коју опет све те линије пролазе, додирујући ту страну BC сферног троугла ABC.

Како у тачкама A и C достиже Ω своје екстремне вредности, то је у тима тачкама градиент од Ω, па према томе, и брзина $\mathfrak{v}$ померања пола једнака нули, Те су две тачке положаји равнотеже, и то A положај лабилне, а C положај стабилне равнотеже.

Ако се пол ротације Земљине налазио у тачки A, то ју је он при најмањем поремећају морао оставити, да се више никад у њу не поврати. Крећући се једном од векторских линија поља grad Ω, пол се је померао и постепено приближавао тачки C где ће, кад у ту тачку стигне, заузети свој дефинитиван положај равнотеже из којега може бити померен само јаким геолошким променама и то само до новога положаја такве стабилне равнотеже. Да превали цео пут из тачке A у тачку C, полу је потребно бесконачно дуго време, и, за то време, пол се може померити свега за деведесет степени од свога полазног до свега коначног положаја.

§ 6. *Једначина путање полова ротације.* Кретање пола ротације одређено је једначином (1). Да бисмо ту једначину могли интегрисати, потребно ју је скаларизирати. Положимо, у то име, у произвољну тачку $M(\Phi, \Psi)$ путање пола почетак координатног система $\xi-\eta$ којега раван додирује Зем-

који пролази кроз ту тачку и кроз врх C сфернога троугла ABC, а наперена је од те тачке. Онда је елеменат померања $d\xi$ пола у том правцу, мерен лучном мером једнак

$$d\xi=-d\Phi\,. \tag{56}$$

Елеменат померања пола у правцу који је нормалан на онај први, а наперен на страну на којој расте Ψ, једнак је

$$d\eta=\cos\Phi\, d\Psi\,. \tag{57}$$

Како је

$$\operatorname{grad}\Omega=\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\mathfrak{i}+\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\mathfrak{j}\,,$$

где $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ означавају јединичне векторе у споменута два правца, то се може векторска једначина (1) рашчланити у ове две скаларне

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=\frac{\varkappa}{2(C-A)}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\,,\\ \frac{d\eta}{dt}&=\frac{\varkappa}{2(C-A)}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\,.\end{aligned} \tag{58}$$

Из предњих једначина следује

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\varkappa}{2(C-A)}\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi}\,, \tag{59}$$

$$\frac{d\Psi}{dt}=\frac{1}{\cos^2\Phi}\frac{\varkappa}{2(C-A)}\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi}\,. \tag{60}$$

Елиминацијом времена t из ових двеју једначина добива се

$$\frac{d\Psi}{d\Phi}=\frac{1}{\cos^2\Phi}\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi}}{\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi}}\,, \tag{61}$$

као диференцијална једначина путање пола.

Како је, према (48),

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi}&=(\Omega_2-\Omega_1)\cos^2\Phi\sin 2\Psi\,,\\ \frac{\partial\Omega}{\partial\Phi}&=(\Omega_3-\Omega_2\sin^2\Psi-\Omega_1\cos^2\Psi)\sin 2\Phi\,,\end{aligned} \tag{62}$$

то добивамо место једначине (61) ову

$$\frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)\sin 2\Psi}{(\Omega_3 - \Omega_2 \sin^2\Psi - \Omega_1 \cos^2\Psi)\sin 2\Phi}\,. \tag{63}$$

Ставимо ли

$$\frac{\Omega_3 - \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1} = k\,, \tag{64}$$

где је, због (47), $k > 1$, онда можемо једначину (63) свести на ову

$$k\frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} - \frac{1}{2}\operatorname{tang}\Psi\, d\Psi = \frac{d\Phi}{\sin 2\Phi}\,. \tag{65}$$

Ова се једначина даде интегрисати, па се добива

$$\cos\Psi \operatorname{tang}^{\varkappa}\Psi = C_1 \operatorname{tang}\Phi \tag{66}$$

као једначина путање пола.

Константа C_1 дата је садањим положајем пола ротације. Ако су координате тога пола обзиром на наш координатни систем, који се подудара са главним осама инерције сиалног покривача Земљиног, Φ_0 и Ψ_0, онда је

$$C_1 = \frac{\cos\Psi_0 \operatorname{tang}^{\varkappa}\Psi_0}{\operatorname{tang}\Phi_0}\,. \tag{67}$$

Када је, на тај начин, одређена путања пола обзиром на одабрани координатни систем, она се, као што ћемо показати, може лако трансформисати на данашњи систем меридијана и упоредника.

§ 7. Кретање пола по његовој секуларној путањи. Из (60) и (48) следује

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\chi(\Omega_2 - \Omega_1)}{2(C - A)}\sin 2\Psi\,, \tag{68}$$

т. ј. интеграцијом

$$\operatorname{tang}\Psi = C_2 e^{\frac{\chi(\Omega_2 - \Omega_1)}{C - A}} \tag{69}$$

Почињемо ли бројати време t од садашњости, то је

$$C \;= \operatorname{tang}\Psi \tag{70}$$

Тим је одређено кретање по његовој путањи.

Из (64) и (46) следује

$$k = \frac{c - a}{b - a} \tag{71}$$

што значи да коефицијенат k, па, према томе, и сама путања пола, зависи само од главних момената инерције a, b, c континенталног покривача Земљиног.

У једначини (69) појављује се само производ од χ и разлике $\Omega_2 - \Omega_1$, па како је

$$\chi(\Omega_2 - \Omega_1) = \chi(c_1 - c_2)(b - a)\,, \tag{72}$$

а вредност овога израза одређује се емпиријски, то се у следећим нумеричким израчунавањима имамо само бринути о главним моментима инерције a, b, c континенталног покривача. Питање да ли је c_1 веће од c_2 утиче само на смисао кретања пола у његовој путањи. Ако је принос c_2 мора и морскога дна већи од приноса c_1 континената, онда ће кретање пола следовати по непромењеној путањи, али у обрнутом смислу од онога када би c_1 било веће од c_2.

Разуме се само по себи да и тангента на путању пола у садањем његовом положају зависи само од облика континенталног покривача. Ту тангенту одредићемо на овај начин. Компоненте градиента од Ω у правцу меридијана и нормално на тај правац претстављене су, на исти начин као (56) и (57), изразима

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}; \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\,, \tag{73}$$

т. ј. примењујући (42) и стављајући $\varphi = 90^0$, изразима

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} &= -2\Lambda_1 \sin\psi - 2\Lambda_2 \cos\psi\,, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} &= -2\Lambda_1 \cos\psi + 2\Lambda_2 \sin\psi\,. \end{aligned} \tag{74}$$

Почетак координатног система $\xi - \eta$ лежи сада у полу, а његова оса ξ тангира меридијан ψ. Положимо у истој тангенцијалној равни са његовим почетком у полу координатни систем $x - y$ којега оса x тангира гринички меридијан, то су компоненте градиента од Ω у том координатном систему претстављене изразима

$$(75)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\cos\psi - \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\sin\psi\,, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\sin\psi + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\cos\psi\,, \end{aligned}$$

т. ј. обрасцима

$$(76)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x} = -2\Lambda_2\,; \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = -2\Lambda_1\,.$$

Угао ψ_0 који затвара тангента полове путање у садашњем положају пола са гриничким меридијаном, дат је обрасцем

$$(77)\qquad \operatorname{tang}\psi_0 = \frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}} = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$$

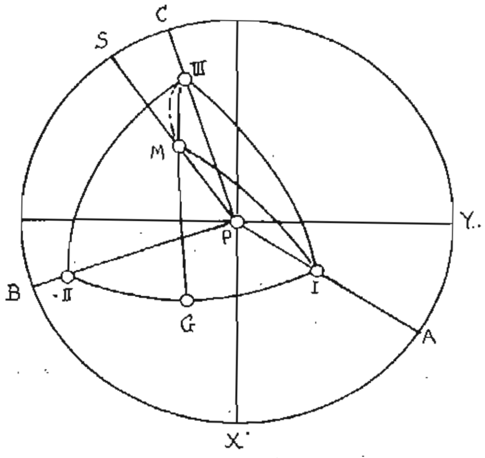
дакле због (41)

$$(78)\qquad \operatorname{tang}\psi_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,.$$

§ 8. Трансформација координата. Као што је речено, указаће се потреба трансформације координата, т. ј. прелаза са координатног система којега се осе подударају са главним осама инерције сиалног покривача Земљиног на координатни систем којега почетак лежи у центру Земље, којега се оса Z подудара са садањом осом ротације Земљине и којега оса x лежи у равни гриничког меридијана. Том приликом послужићемо се приложеном сликом. Нека нам у тој слици круг $XAYCSBX$ претставља Земљину сферу посматрану са северне стране Земљине осе, а P садашњи северни пол. Нека тачке I II III претстављају оне тачке Земљине сфере где главне осе инерције сиалног покривача ту сферу продиру. Пол инерције I нека одговара минимуму, а пол III максимуму момента инерције. Спојимо ли те три тачке највећим круговима Земљине сфере, то добивамо сферни троугао I II III у којем све три угла имају по деведесет степени. Крива III M нека претставља један део секуларне путање северног пола ротације, а M нека буде једна њена произвољна

тачка. Положимо кроз ту тачку и пол инерције III највећи круг III G, онда је

$$\text{arc } IG = \Psi\,; \qquad \text{arc } GM = \Phi\,.$$



Положимо ли кроз ту тачку M и кроз пол P највећи круг PS, онда је

$$\text{arc } XYS = \psi\,; \qquad \text{arc } PM = 90^0 - \varphi\,.$$

Означимо са φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2; φ_3, ψ_3 географске координате тачака I, II, III у садањој мрежи меридијана и упоредника, онда су лукови највећих кругова положених кроз тачку P и тачке I, II и III који леже између тачке P и осталих једнаки

$$\text{arc } PI = 90_0 - \varphi_1; \quad \text{arc } PII = 90^0 - \varphi_2; \quad \text{arc } PIII = 90^0 - \varphi_3\,,$$

док је

$$\text{arc } XA = \psi_1: \quad \text{arc } XYB = \psi_2; \quad \text{arc } XYC = \psi_3\,.$$

Садашњи положај Земљине осе затвара са осама координатног система I II III углове $(90^0 - \varphi_1)$; $(90^0 - \varphi_2)$; $(90^0 - \varphi_3)$, због чега су координате пола у том систему претстављене овим обрасцима

$$x=r\sin\varphi_1;\qquad y=r\sin\varphi_2;\qquad z=r\sin\varphi_3\,.$$

Те координате изражене су, аналогно (2), помоћу поларних координата Φ_0 и Ψ_0 пола обрасцима.

$$x=r\cos\Phi_0\cos\Psi_0;\quad y=r\cos\Phi_0\sin\Psi_0;\quad z=r\sin\Phi\,,$$

па је зато

$$\text{(79)}\qquad \begin{aligned}\cos\Phi_0\cos\Psi_0&=\sin\varphi_1\,,\\ \cos\Phi_0\sin\Psi_0&=\sin\varphi_2\,,\\ \sin\Phi_0&=\sin\varphi_3\,.\end{aligned}$$

Одавде следује

$$\text{(80)}\qquad \Phi_0=\varphi_3;\qquad \operatorname{tang}\Psi_0=\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}\,,$$

чиме је одређен садањи положај пола у координатном систему I II III.

Указаће се потреба да одредимо координате Φ_a и Ψ_a оне тачке путање пола која одговара једној одређеној ширини φ_a садање мреже меридијана и упоредника. Те ћемо координате одредити овако. Означимо лук *IM* за ξ, то следује из сферног троугла *IMG* којега је угао код *G* прави,

$$\text{(81)}\qquad \cos\xi=\cos\Phi\cos\Psi\,.$$

Из сферног троугла *IMP* следује

$$\cos\xi=\cos(90^0-\varphi_1)\cos(90^0-\varphi)+$$
$$+\sin(90^0-\varphi_1)\sin(90^0-\varphi)\cos(\psi-\psi_1)\,,$$

т. ј.

$$\text{(82)}\qquad \cos\xi=\sin\varphi_1\sin\varphi+\cos\varphi_1\cos\varphi\cos(\psi-\psi_1)\,.$$

Из троугла *PMIII* следује

$$\cos(90^0-\Phi)=\cos(90^0-\varphi_3)\cos(90^0-\varphi)+$$
$$+\sin(90^0-\varphi_3)\sin(90^0-\varphi)\cos(\psi-\psi_3)\,,$$

т. ј.

$$\text{(83)}\qquad \sin\Phi=\sin\varphi_3\sin\varphi+\cos\varphi_3\cos\varphi\cos(\psi-\psi_3)\,.$$

Координате φ_a, ψ_a, односно Φ_a, Ψ_a, тражене тачке треба да задовоље једначине (81), (82), (83) и једначину (66) путање пола, дакле

$$\text{(84)}\qquad \left\{\begin{aligned}\cos\Phi_a\cos\Psi_a&=\sin\varphi_1\sin\varphi_a+\\ &\quad+\cos\varphi_1\cos\varphi_a\cos(\psi_a-\psi_1)\,,\\ \sin\Phi_a&=\sin\varphi_3\sin\varphi_a+\\ &\quad+\cos\varphi_3\cos\varphi_a\cos(\psi_a-\psi_3)\,,\end{aligned}\right.$$
$$\cos\Psi_a\operatorname{tang}^{\kappa}\Psi_a+C_1\operatorname{tang}\Phi_a\,.$$

Из ових једначина могу се, ако је дато φ_a, израчунати координате ψ_a, Φ_a, Ψ_a, и то, најједноставније, на овај начин. Горњим једначинама може се дати овај облик

$$\text{(85)}\qquad \left\{\begin{aligned}&\cos\Phi_a\cos\Psi_a=f_1(\psi_a);\qquad \sin\Phi_a=f_2(\psi_a)\,,\\ &\operatorname{tang}^{\kappa}\Psi_a=C_1\frac{f_2(\psi_a)}{f_1(\psi_a)};\qquad \cos^2\Psi_a=\frac{f_1^{\,2}(\psi_a)}{1-f_2^{\,2}(\psi_a)}\,.\end{aligned}\right.$$

Већ општим током секуларне путање пола дата је област у којој се тражена тачка налази. Нацртају ли се, према томе, за један ред вредности од ψ_a обе криве претстављене последњим двема једначинама, то нам координате Ψ_a и ψ_a пресека тих двеју крива дају тражене величине.

Трансформација координата Ψ, Φ на координате ψ, φ врши па овај начин.

Из правоуглог сферног троугла *IGM* следује ако његов угао код *I* означимо са α

$$\text{(86)}\qquad \operatorname{tang}\alpha=\frac{\operatorname{tang}\Phi}{\sin\Psi}\,,$$

а из сферног троугла *IPII*, којега је страна *I II* једнака 90^0, следује, ако његов угао код *I* означимо са β.

$$\text{(87)}\qquad \cos\beta=\frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1}\,,$$

Зато је у сферном троуглу *IPM* угао код *I* једнак $(\alpha-\beta)$. Страна *IM* тога троугла једнака је ξ, страна *PI* једнака је $(90^0-\varphi_1)$, страна *PM* једнака је $(90^0-\varphi)$, а угао код једнак је $(\psi-\psi_1)$. Зато је

$$\cos(90^0-\varphi)=\cos\xi\cos(90^0-\varphi_1)+$$
$$\sin\xi\sin(90^0-\varphi_1)\cos(\alpha-\beta)\,,$$

т. ј.

$$\text{(88)}\qquad \sin\varphi=\cos\xi\sin\varphi_1+\sin\xi\cos\varphi_1\cos(\alpha-\beta)$$

или

$$\sin\varphi=\cos\xi\,\{\sin\varphi_1+\operatorname{tang}\xi\cos\varphi_1\cos(\alpha-\beta)\}\,.$$

Стављајући

$$\operatorname{tang}\xi\cos(\alpha-\beta)=\operatorname{tang}\gamma \tag{89}$$

добивамо

$$\sin\varphi=\frac{\cos\xi\sin(\varphi_1+\gamma)}{\cos\varphi} \tag{90}$$

која једначина одређује координату φ.

Из истога троугла следује

$$\sin(\psi-\psi_1)=\frac{\sin\xi\sin(\alpha-\beta)}{\cos\gamma}\,, \tag{91}$$

чиме је одређена и координата ψ.

§ 9. Нумерички резултати. Хоризонтална конфигурација континенталних плоча, у које рачунамо и плићаке, т. ј. делове мора до 200 m дубине, веома је неправилна, а исто тако и њихова вертикална конфигурација. Док о хоризонталној расподели имамо довољно података, дотле нам о вертикалној ови подаци недостају, јер нам је позната само конфигурација горње површине континената, а не знамо ништа поуздано о дебљини тих плоча и о изгледу њихове доње површине. Зато смо се већ при изнођењу претходних образаца одлучили да сматрамо континенталне плоче уравњене на обе њихове стране и претпоставили да оне имају свугде исту дебљину. Да бисмо учињену грешку по могућтву компензовали, замислићемо при одређивању хоризонталних контура континената да смо ове на извесним местима нешто истегли да би их ослободили њихових главних набора. Ти главни набори су екваторијалан систем бора који се протеже од Атласа преко Алпи и Кавказа и преко Хималаје и меридионални набори Анда. Истезањем Европе за глачање ових бора, покрива се цело Средоземно Море и Црно Море континентом, док истезањем Азије ова допре чак до екватора. Узмемо ли у обзир да се плићаци у Северном Леденом Мору изнад Европе и Азије просечно шире до 80° ширине, то добивамо, ако узмемо у руке планиглоб антипода [1]), ову слику. Европа, Азија,

---

[1] 10. Auflage, Gotha 1925, Tafel 1

део Африке који лежи северно од екватора и антиподно померена Јужна Америка заузели су скоро цео октант Земљине површине који лежи између екватора и северног пола и између меридијана 20° западно и 160° источно. Од тога октанта није, у ствари, заузет континентом сферни четвороугао који лежи између ширина 0° и 60°, а дужина 150° и 160° источно од Гринича. Тако добивамо, за те делове континенталног покривача сферни двоугао I који лежи између меридијана $\psi'=-20°$ и $\psi''=160°$ и ширина $\varphi'=60°$ и $\varphi''=90°$ и сферни четвороугао II између $\psi'=-20°$; $\psi''=150°$; $\varphi'=0°$; $\varphi''=60°$. При томе означавамо западне дужине и јужне ширине знаком минус. На истом планиглобу налазимо да је јужни део Африке, претворен у сферни четвороугао, заузео простор између меридијана 12° и 40° источно од Гринича и између екватора и 30° јужне ширине, дакле онај који је у следећем табеларном прегледу означен са III. Претстављајући у сферне четвороуглове антиподно померени део Америке који, непомерен, лежи на северној хемисфери са припадајућим плићацима у Северном Леденом Мору, па претварајући у сферне четвороуглове Сундска Острва и Аустралију, налазимо да су на нашем планиглобу континенти заузели још сферне четвороуглове означене у приложеној табели са IV, V, VI, VII и VIII. При томе није још узет у обзир антарктички континенат, који, истегнут, заузима, због своје велике висине, целу јужну калоту Земљину, ограничену поларним кругом. При горњем израчунавању нису, дакле, поларни крајеви још довољно узети у обзир, јер смо до ширине од 60° узели у обзир само једну калоту, а њих је две. Но при томе ваља имати још ово у виду. Јужна поларна калота пружила се до ширине од 66°30′, а на северној калоти фали део од 80° па до 90°. Зато је само прстен који лежи између ширина 66°30′ до 80° покривен два пута. Зато ваља тај прстен још додати; он је у приложеној табели означен са IX.

Ставе ли се границе ψ'', ψ', φ'', φ' сферних четвороуглова I до IX, садржане у приложеној табели, редом у обрасце (37) и (38), у којима ваља, према ономе што је речено у § 4, ставити $c=1$, то се добивају приноси тих појединих делова континенталног покривача моментима инерције i_1, l_2 i_3 и моментима девијације λ_1, λ_2, λ_3. Збир тих појединих при-

Континенти, редуковани на сферне четвороуглове, границе ових четвороуглова, њихови приноси i_1 i_2, i_3 моментима инерције и њихови приноси λ_1, λ_2, λ_3 моментима девијације континенталног покривача Земљиног.

	Сферни четвороуглови								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
ψ''	160°	150°	40°	150°	100°	150°	120°	160°	360°
ψ'	—20°	—20°	12°	100°	60°	120°	50°	—20°	0°
φ''	90°	60°	0°	0°	—20°	—20°	—40°	—60°	—66°30′
φ'	60°	0°	—30°	—20°	—40°	—40°	—60°	—90°	—80°
i_1	0,41665	1,62162	0,06612	0,19811	0,19936	0,09843	0,25648	0,41665	0,40536
i_2	0,41665	1,54748	0,19859	0,11200	0,06311	0,09843	0,15495	0,41665	0,40536
i_3	0,00845	1,97009	0,22398	0,28682	0,15749	0,11811	0,13405	0,00845	0,04065
λ_1	0,07831	0,52669	—0,02785	—0,03928	—0,08539	—0,04640	—0,12362	—0,07831	0
λ_2	0,02850	0,24559	—0,05709	0,02750	—0,01506	0,04640	—0,01082	—0,02850	0
λ_3	0	0,04416	0,08478	—0,11830	0,02480	—0,05640	0,00895	0	0

$$(92) \quad \begin{cases} i_1=3,67878; \quad i_2=3,41322; \quad i_3= \quad 2,94809\,, \\ \lambda_1=0.20415; \quad \lambda_2=0,23652; \quad \lambda_3=—0,01201\,, \end{cases}$$

т. ј. моменте инерције и моменте девијације целокупног континенталног покривача Земљиног обзиром на осе ортогоналног координатног система везаног са садашњом мрежом меридијана и упоредника. При томе је стављено $c=1$.

Нацртају ли се, употребивши нумеричке вредности (92), обе криве претстављене једначинама (45), и то за интервал $—90^0<\varphi<90^0$; $0<\psi<180^0$, то се налази да се ове две криве секу међусобно у тачкама $\psi=13^0$, $\varphi=—19^0$; $\psi=51^0$, $\varphi=67^0$; $\psi=108^0$, $\varphi=—13^0$. Тачност овога графички добивеног резултата може се аналитички произвољно пооштрити. Израчунавши одговарајуће вредности од φ и обе криве (45) за $\psi=12^030'$ и $\psi=13^030'$, па замењујући, на том кратком интервалу, те криве правама, добива се тачнији пресек тих крива но што је графички био одређен. Употребив исти метод и за остала два пресека, добивамо, пошто сваком решењу одговара још по једно антиподно, ових шест тачака у којима главне осе инерције континенталног покривача продиру Земљину сферу

$$(93) \quad \begin{cases} \psi_1=51^018' \quad \psi_2=—72^0\ 2' \quad \psi_3=—166^039' \\ \varphi_1=66^051' \quad \varphi_2= \quad 13^019' \quad \varphi_3= \quad 18^046' \end{cases}$$

$$(94) \quad \begin{cases} \psi_4=—128^042' \quad \psi_5= \ 107^058' \quad \psi_6= \quad 13^021' \\ \varphi_4=— \ 60^041' \quad \varphi_5=—13^019' \quad \varphi_6=—18^046' \end{cases}$$

од којих прве три леже на северној, а друге три на јужној хемисфери.

Тачка ψ_1, φ_1 лежи у близини утока реке Печоре у Северно Ледено Море, тачка ψ_2, φ_2 лежи у Карајипском Мору, а тачка ψ_3, φ_3 лежи јужно од Хавајских Острва.

Стављајући нумеричке вредности (92) и (93) у образац (42), добивамо ове нумеричке вредности за главне моменте инерције континенталног покривача.

$$(95) \qquad \begin{aligned} a&=2,81573 \\ b&=3,46013 \\ c&=3,76462\,, \end{aligned}$$

одакле следује помоћу (71)

(96) $$k=1,4694\,.$$

Из (95) следује да оси ψ_1, φ_1 одговара минимум момента инерције, оси ψ_3, φ_3 максимум, а оси ψ_2, φ_2 максимум-минимум. Тачкама ψ_1, φ_1 и ψ_3, φ_3 дате су обе крајње тачке секуларне путање пола. Сем тога, следује из (78) и (92) да та путања додирује у садањем положају северног пола меридијан $\psi=40^{\circ}47'$, чиме је секуларна путања пола већ, у свом главном току, одређена.

Ток те криве подудара се, као што ћемо се још уверити, веома добро са оном путањом северног пола Земљиног која следује из докумената Земљине прошлости. По тима документима, налазио се северни пол, од прастарих времена од којих још остадоше сведочанства о клими Земљиној, у Великом Океану, да одатле преко северно-западног крака Северне Америке дође у његов садашњи положај. Одатле следује да је кретање пола следовало по нашој криви од пола инерције ψ_3, φ_3 ка полу инерције ψ_1, φ_1. Зато је c_2 веће од c_1, а то значи да под океанима лежи слој специфично тежи него што је онај од којег су саграђене континенталне плоче. Тај слој, испод мора, без обзира на његов минералошки састав, показује флуидалне особине тек на већим дубинама него што се на такве особине наилази испод континената. То све одговара Хајфордовом схватању изостазије. Врло је вероватно да флуидитет Земљиног покривача зависи, у првом реду, од температуре, па како испод континенталних плоча наилазимо пре на високе температуре него испод океана, то, природно, лежи површина изостатског изједначења испод мора дубље него испод континената.

Тачно израчунавање секуларне путање пола извршићемо на овај начин. Садањи положај северног пола ротације, у координатном систему који се поклапа са главним осама инерције котнтиненталног покривача, одређен је једначинама (79) и (80). Стављајући у те једначине вредности (93), добивамо

(97) $$\Phi_0=18^{\circ}46'; \quad \Psi_0=14^{\circ}5'.$$

Применив образац (67), добивамо

(98) $$C_1=0,37408\,,$$

(99) $$C_2=0.25082\,.$$

Да бисмо, при нумеричком израчунавању путање пола, одговорили и на питање којом се брзином кретао пол по тој својој путањи, поступићемо као што следује. Једначину (69) можемо написати и овако

(100) $$\operatorname{tang}\,\Psi=C_2 e^{\mu t},$$

где μ означава једну константу у којој су, поред величина C и B које познајемо довољном тачности, садржане величине Ω_1, Ω_2 и χ о чијим нумеричким вредностима нисмо још обавештени. Ми можемо, међутим, константи μ дати, за сада, једну произвољну одређену нумеричку вредност, ако јединицу којом меримо време оставимо још неодређену, да бисмо је, после довршеног рачуна, одредили из упоређена добивених резултата са документима Земљине прошлости. Од тих сведочанства су за наш рачун најпоузданија она која говоре о клими Карбона, јер је, пре свега, тај период Земљине прошлости оставио јасних трагова о распореду тадањих климатских зона, а с друге стране, добивени су, испитивањем радиоактивних субстанција, доста поуздани податци о старости Карбона. Заиста се већина палеоклиматолога слаже у томе да се, за време Карбона, Земљин северни пол морао налазити у близини оне тачке Земљине љуске у којој се данас секу упоредник $\varphi=30^{\circ}$ и меридијан $\psi=-150^{\circ}$. Вегенер и Кепен дају за тај пол Карбона координате $\varphi=30^{\circ}$, $\psi=-150^{\circ}$, а Крајхгауер $\varphi=35^{\circ}$, $\psi=-147^{\circ}$. Споменута испитивања радиоактивних субстанција дају за време протекло од Карбона интервал од 300 милиона година.

Путања северног пола коју смо овде извели на сасвим различит начин од геолошког, из конфигурације континената, пролази, заиста, кроз онај предео Земљине површине у којем се морао налазити пол карбонског периода. Да се о томе осведочимо, потражимо ону тачку у којој наша путања пресеца тридесети северни упоредник.

Употребив једначине (86) и (85), у које ваља ставити $\varphi_a = 30^{\circ}$ и нумеричке вредности (93) и (97), добивамо $\Psi_a = 61^{\circ}40'$; $\psi_a = -151^{\circ}40'$, што значи да наша путања пролази, заиста, у непосредној близини тачке $\varphi=30^0$; $\psi=-150^0$, коју смо горе, на темељу геолошких сведочанства, означили као највероватнији положај пола за време Карбона.

Време које је од пролаза пола кроз ту тачку његове путање па до садашњости протекло поделићемо у десет једнаких делова, па једну такву десетину одабрати за јединицу којом ћемо мерити време. Ставимо, дакле, у (100) за $t=-10$, $\Psi=61^0 40'$ то добивамо

$$\mu=-0{,}20007 . \tag{101}$$

Сада је све припремљено за израчунавање путање пола и за испитивање кретање пола по тој путањи. Из (99), (100) и (101) следује

$$\log \operatorname{tang} \Psi = \log 0{,}25082 - 0{,}20007\, Mt \, ,$$

где M означава модуо Бригових логаритама. Зато је

$$\log \operatorname{tang} \Psi = -0{,}08689\, t - 060064 \, .$$

Стављајући за t бројеве -40, -30, -20, -15, -10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, израчунате су помоћу предње једначине координате Ψ тачака полове путање које је деле у означене временске интервале. Затим су помоћу једначине (66) и нумеричких вредности (96) и (98) израчунате координате Φ. Из координата Ψ и Φ израчунате су помоћу (81), (86), (89), (90) и (91) координате φ и ψ тих тачака. Те су координате саопштене у приложеној табели. Та табела садржава историју Земљиних полова ротације.

Време у одабраним јединицама, бројано позитивно у будућност, негативно у прошлост	Географска	
	ширина	дужина
	повременог положаја северног пола Земљиног	
— ∞	18°46′	—166°39′
—40	19° 1′	—165°37′
—30	19°21′	—164° 6′
—20	20°38′	—160°16′
—15	22°50′	—156°42′
—10	30° 8′	—151°40′
— 9	32°54′	—150°28′
— 8	36°35′	—149°15′
— 7	41°12′	—148° 0′
— 6	46°52′	—146°42′
— 5	53°35′	—145°24′
— 4	61° 8′	—144° 6′
— 3	69° 4′	—142°46′
— 2	76°50′	—141°31′
— 1	83°57′	—140°18′
0	90°	
+ 1	84°58′	+ 41°56′
+ 2	80°57′	+ 43° 0′
+ 3	77°47′	+ 43°58′
+ 4	75°19′	+ 44°52′
+ 5	73°24′	+ 45°41′
+10	68°39′	+ 48°39′
+ ∞	66°41′	+ 51°18′

§ 10. *Историја полова Земљиних.* Нацртају ли се положаји северног пола, како су у приложеној табели дати својим географским координатама и временима, на каквој географској карти (при чему се може згодно употребити уобичајена претстава западне и источне хемисфере Земљине, пошто онај део путање пола који припада прошлости лежи потпуно на западној хемисфери, а онај који припада будућности на источној), то се уочава ово.

За време палеозоикума налазио се северни пол ротације у близини тачке $\varphi=18^0 46'$; $\psi=-166^0 39'$ данашње мреже меридијана и упоредника. Та тачка претставља лабилан положај равнотеже пола ротације, који је морао бити напуштен при најмањем поремећају те равнотеже, а таквих поремећаја било је, за време прошлости Земљине, у изобиљу. Поред свега тога, требало је веома дугих времена док се пол осетно удаљио од из тог свога положаја, јер је у уколини његовој градиенат поља Ω особито мален, па, према томе, и брзина кретања пола незнатна. Тек кад се пол одмакао за 1° до 2° од онога положаја, добило је кретање пола јачег маха. Спочетка се пол кретао у источном правцу, а онда се, заокрећући постепено, почео да креће све брже према северу да на данашњој ширини од 69° и западној дужини од 143° достигне максимум брзине кретања. Онда је та брзина почела веома неосетно да опада, тако да је пол са скоро непромењеном брзином прешао преко северозападног крака Северне Америке, па преко Северног Леденог Мора стигао у његов садашњи положај. У будућности кретаће се тај пол са стално опадајућом брзином и, савијајући нешто према истоку, приближавати се тачки $\varphi=66^{0}41'$; $\psi=51^{0}18'$ која лежи у близини ушћа реке Печоре, да би тек после бесконачно дугог времемена онамо стигао.

Кретање пола које је овде описано, је његово релативно кретање према Земљиној површини. Тим кретањем не мења се, као што сам то доказао у наведеним расправама, оријентација Земљине осе у васиони, тако да се тим кретањем не мења косина еклиптике. Тим кретањем не мењају се, дакле, климатске зоне Земљине, него се оне, такве какве су, померају, повлачене од пола, по Земљиној површини.

Што се тиче апсолутно мереног тока времена, који је у приложеној табели претстављен само релативном мером, то следује из саопштених података о старости Карбона ово. Ако се северни пол за време карбонскога периода Земљиног налазио, у ствари, на географској ширини од 30°, онда би то одговарало временском моменту —10 наше табеле. Ако је од Карбона протекло, заиста, 300 милиона година, онда би јединица времена коју смо у нашим рачунима употребили имала стварну дужину од 30 милиона година. Требали бисмо, према томе, бројеве прве колумне наше табеле помножити са 30 да добијемо кретање пола изражено у апсолутној мери, у милионима година. У таквом случају било би од улаза пола у американски континенат протекло $4 \times 30=150$ милиона година, што изгледа, према геолошким испитивањима, сувише

много. Постоје две могућности да уклонимо ту несугласицу. Пре свега је могуће да се пол за време Карбона налазио на нешто нижој ширини, јер споменута геолошка одређивања његовог положаја су само приближна. Ако се пол за време Карбона налазио на ширини од 19°, онда би то одговарало временском моменту —40 наше табеле, па би јединица времена коју смо за наш рачун употребили имала стварну дужину од $300:40=7,5$ милиона година, а од улаза пола у американски континенат протекло би само $4 \times 7,5==30$ милиона година, што би се подударало са подацима геологије.

Но ваља имати у виду и ово. И наша израчунавања главних оса инерције сиалног покривача Земљиног су приближна, јер смо, како што је напоменуто, недовољно обавештени о димензијама тога покривача. Наш рачун изведен је, додуше, свом строгошћу, али полазећи из података који су само апроксимативни. Из тога разлога подлежи резултат нашег рачуна положаја главних оса инерције неизбежним грешкама које могу, што се тиче положаја полова инерције, износити неколико степени. Померимо ли, према томе, положај пацифичног пола инерције за десет степенн северно, онда је, и тиме, сва несугласица уклоњена. Од Карбона, чији би пол онда лежао на ширини од 30°, било би протекло 300 милиона година, а од улаза пола у американски континенат 30 милиона година. Најприродније би било обе могућности тумачења комбиновати, па рачуном добивени пол инерције и емпиријски нађен пол Карбона померити сваки за 5° и довести их на ширини од 25° у непосредну међусобну близину. Иначе се наша из конфигурације континената израчуната путања пола слаже одлично са оном која је нађена сасвим другим начином, геолошки. Уцрта ли се на Крајхгауревој карти на којој је он означио своју путању пола, наша, то се те две путање на своме делу од 35° ширине па до садањега положаја пола поклапају скоро сасвим.

Израчуната путања претставља непертурбирану путању пола по Земљиној површини. Стварна путања имала је својих поремећаја. Један такав поремећај десио се, на пример, за време квартернога леденог доба. Тада су нагомилане снежне маса у Европи и Америци помериле, као сам то показао у споменутом мом одељку Приручника Геофизике, пол инерције целокупне Земље за 9′ и [illegible]

Чељускину. То би, дакле, био правац и величина аномалије пола инерције, а како је (види споменуту расправу) вектор брзине померања пола пропорционалан тој аномалији, то је и кретање пола ударило у том правцу, т. ј. скренуло у лево, према рту Чељускину. Под нагомиланим леденим теретом, утонули су залеђени делови континената нешто дубље у своју флуидалну подлогу, чиме се је аномалија пола инерције умањила и брзина кретања ослабила. А када се лед отопио, та је аномалија добила противан знак, јер су утонули делови континената остали још дуже времена у своме нижем положају. Променом знака аномалије променио се и правац кретања пола и он се почео кретати у правцу од рта Чељускина. То враћање траје још и дан данашњи, јер се Феноскандија и делови Северне Америке, ослобођени леденог терета, дижу, као што је доказано, још увек у вис. Враћање пола следује сада у правцу $\psi = 105^\circ + 180^\circ = -75^\circ$. Оно се комбинује са секуларним померањем пола које следује, као што је напред речено, у правцу $\psi = 40^\circ 17'$. Оба кретања дају резултанту правца $\psi = -42^\circ$, како га је Ванах, заиста, констатовао из анализе астрономских посматрања варијације полова. Узме ли се у обзир да је квартерно ледено доба трајало свега 600 хиљада година, а да се је пол за то време, према напред изложем, померио по својој секуларној путањи за $0{,}6\,(55^\circ 7' : 7{,}5) = 29'$, то се главни поремећај леденога доба односио само на кратки део путање и то у том смислу да је пол у почетку тога дела путање почео да је оставља да јој се, на крају тога дела, опет приближи.