О ОСЦИЛАЦИЈАМА ТЕМПЕРАТУРЕ У РАЗНИМ СЛОЈЕВИМА ЗЕМЉИНЕ АТМОСФЕРЕ

од

М. МИЛАНКОВИЋА

О ОСЦИЛАЦИЈАМА ТЕМПЕРАТУРЕ У РАЗНИМ СЛОЈЕВИМА ЗЕМЉИНЕ АТМОСФЕРЕ

ОД М. МИЛАНКОВИЋА

(Приказано на скупу Академије Природних Наука 21. јануара 1929.)

I

Ја сам се већ у моме делу[1] бавио теоријским испитивањем проблема какве варијације температуре изазива годишњи ток Сунчеве радијације у разним слојевима Земљине атмосфере. Том приликом сам, због математске компликованости проблема, учинио неке претпоставке које су проблем упростиле и његово решење олакшале, али му умањиле замашај. Тако сам, при одређивању температуре ваздушних слојева, занемарио утицај спровођења топлоте у дубине тла; сем тога сам замислио атмосферу редуковану на њену виртуелну висину. Сада ми је, приликом обрађивања истог предмета, пошло за руком да се оних претпоставка ослободим и проблем решим у његовој потпуности. Резултати до којих сам овога пута дошао јасно показују снагу математског апарата за испитивање термичких појава изазваних Сунчевом радијацијом. Од тих резултата најважнијих је овај. Позната је чињеница да температурни екстреми задоцњавају иза екстрема инсолације, т. ј. дан најтоплији, а и најхладнији дан годишњег тока температуре не падају у доба летњег односно зимског солстиција; узрок те појаве био је непознат, још је мање било могуће дати и квантитавног тумачења тој појави. Теоријска испитивања која овде следују дају не само узрочно тумачење те појаве него доводе и до нумеричких резултата који се поклапају са опажањима. Исто важи и за појаву ширења температурних осцилација у ваздушне висине. Добивени резултати дају нумеричких података о таквим осцилацијама и за оне висине до којих директна опажања нису још допрла.

[1] Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. Paris 1920.

II

Термичке појаве проузроковане Сунчевом радијацијом у атмосфери Земље регулисане су, као што сам показао у споменутом делу, овим диференцијалним једначинама:

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x} = a_2(x)\, Z(x,t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x} = c\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \tag{2}$$

$$2\epsilon(x,t) + c\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} + a_2(x)\, Y(x,t)\,. \tag{3}$$

При томе је:

$$O(x,t) + U(x,t) = Y(x,t) \tag{4}$$

$$O(x,t) - U(x,t) = Z(x,t). \tag{5}$$

$$\epsilon(x,t) = a_2(x)\,\sigma\,\Theta^4(x,t)\,. \tag{6}$$

У горњим једначинама означава: t време, x вертикално одстојање од Земљине површине, c специфичну топлоту јединице масе атмосфере при констатној запремини, $\rho(x)$ густину атмосфере у висини x, $u(x,t)$ температуру атмосфере у Целзиусовим степенима, $\Theta(x,t)$ апсолутну температуру атмосфере, $a_2(x)$ апсорпциону способност јединичног слоја за тамне зраке, $\epsilon(x,t)$ емисиону способност јединичног слоја, σ константу Стефановог закона, $O(x,t)$ тамну радијацију атмосфере у висини x, наперену према површини Земље, $U(x,t)$ тамну радијацију у атмосфери у висини x, наперену од површине Земље, $W(x,t)$ интензитет Сунчеве радијације у висини x по јединици хоризонталне површине.

Ове једначине ваља комплетирати граничним условима. Услов на доњој граничној површини је овај. Земљина површина емитује радијацију $U(o,t)$, а прима Сунчеву радијацију $W(o,t)$ и атмосферину радијацију $O(o,t)$; сем тога јој се довађа кондукцијом из унутрашњости Земље у јединици времена топлотна количина Q_p, па је

$$U(o,t) = W(o,t) + O(o,t) + Q_p$$

т. ј.

$$Z(o,t) + W(o,t) + Q_p = 0. \tag{7}$$

На горњој граници атмосфере, у висини h, је $O(h,t) = 0$, т. ј.

$$Y(h,t) + Z(h,t) = 0. \tag{8}$$

III

Ток Сунчеве радијације која допире до горње границе Земљине атмосфере, може се, било да се ради о дневном, било годишњем току, представити Фуриеровим редом

$$W_1(t) = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{T}t + a_2\cos\frac{4\pi}{T}t + a_3\cos\frac{6\pi}{T}t + \cdots$$
$$+ b_1 \sin\frac{2\pi}{T}t + b_2\sin\frac{4\pi}{T}t + b_3\sin\frac{6\pi}{T}t + \cdots$$

Довољно је ограничити само на прва два члана овога реда, т. ј. ставити

$$W_1(t) = a_0 + a_1\cos\frac{2\pi}{T}t \tag{9}$$

пошто нема никакве тешкоће да се са овог специјалног случаја пређе на онај општи.

Земљина атмосфера загревана је, у главном, тамним радијацијама, па сем рефлексија пропушта скоро несметано сунчане зраке. Зато је дозвољено ставити

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = 0\,. \tag{10}$$

Исту ову претпоставку учинио сам приликом израчунавања вертикалне конституције Земљине атмосфере, па су се добивени резултати одлично сложили са опажањима, нашто је указао и Ст. Мохоровичић[1].

Означава ли A рефлексиону моћ Земљине површине и Земљине атмосфере, то је према пређашњем

$$W(o,t) = (1-A)\,(a_0 + a_1\cos\frac{2\pi}{T}t)\,. \tag{11}$$

Топлотна количина Q_p, доведена до површине Земље кондукцијом тла, представљена је изразом

$$Q_p = K\frac{\partial v(o,t)}{\partial x} \tag{12}$$

где $v(x,t)$ представља температуру тла у дубини x, а K термички коефициенат спроводљивости тла. У моме делу, ја сам за $v(x,t)$ извео овај израз

[1] Meteorol. Zeitschrift 1921. стр. 316.

(13) $$v(x,t) = v_0 + g_T x + A_1 e^{-\frac{x}{m}\sqrt{\frac{\pi}{T}}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{x}{m}\sqrt{\frac{\pi}{T}} - \epsilon\right).$$

У њему означава m^2 температурни коефицијенат спроводљивости тла, v_0 средњу температуру горњег слоја тла за време периоде T, g_T, A_1 и ϵ су константе. Зато је

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = g_T - \frac{A_1}{m}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\, e^{-\frac{x}{m}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{x}{m}\sqrt{\frac{\pi}{T}} - \epsilon\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{x}{m}\sqrt{\frac{\pi}{T}} - \epsilon\right)\right\}.$$

Како је g_T веома малено, то се добива

(14) $$\frac{\partial v(o,t)}{\partial x} = -\frac{A_1}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} - \epsilon\right).$$

Из (13) и (14) следује

(15) $$\frac{\partial v(o,t)}{\partial x} = -\frac{1}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\left[v\left(o, t + \frac{T}{8}\right) - v_0\right].$$

Температуре горњега слоја тла и доњег слоја атмосфере не разликују се осетно, нарочито када се ради о годишњем току температуре, због чега се при израчунавању горњег израза може ставити

(16) $$\begin{cases} v(o,t) = u(o,t) \\ v_0 = u_0 \end{cases}$$

где u_0 означава средњу температуру доњег слоја атмосфере за време периоде T. Зато је

(17) $$Q_p = -\frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\left[u\left(o, t + \frac{T}{8}\right) - u_0\right].$$

Функција $\rho(x)$ представљена је довољно тачно изразом

(18) $$\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x}{H}}$$

где ρ_0 означава густину доњег ваздушног слоја, а H виртуелну висину атмосфере. Њена је нумеричка вредност

$$H = 8000\ m$$

Таква атмосфера шири се теоретски у бесконачност. Зато је

(19) $$h = \infty.$$

Апсорпциона способност $a_2(x)$ пропорционална је густини апсорпционог слоја; зато је

(20) $$a_2(x) = k\rho(x)$$

где k представља апсорпциони коефицијенат.

Због тога је и

(21) $$\epsilon(x,t) = k\rho(x)\sigma\Theta^4(x,t).$$

Узимајући све претходно у обзир, добивају једначине (1), (2), (3), (7) и (8) сада овај облик

(22) $$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x} = k\rho_0 e^{-\frac{x}{H}} Z(x,t)$$

(23) $$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x} = c\rho_0 e^{-\frac{x}{H}} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

(24) $$2k\sigma\Theta^4(x,t) + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = kY(x,t)$$

(25) $$Z(o,t) + (1-A)\left(a_0 + a_1\cos\frac{2\pi}{T}t\right) = = \frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\left[u\left(o, t+\frac{T}{8}\right) - u_0\right]$$

(26) $$Y(\infty, t) + Z(\infty, t) = 0.$$

Ради се, дакле, о томе наћи партикуларне интеграле једначине (22), (23), (24) који задовољавају граничне услове (25) и (26).

IV

Периоди T одговара средња вредност инсолације

(27) $$W_m = a_0$$

а овај опет, као што сам показао у моме делу, овај распоред атмосферске температуре

$$\sigma\Theta_m^4(x) = \frac{1}{2}(1-A)\,a_0\left[1 + k\int_x^h \rho(x)\,dx\right]$$

т. ј. због (18) и (19)

$$\sigma \Theta_m^4(x) = \frac{1}{2}(1-A)\, a_0 [1 + k \rho_0 H e^{-\frac{x}{H}}].$$

Означимо ли са M масу целокупног стуба атмосфере који се уздиже над једним квадратним центиметром Земљине површине и који је једнак

$$M = 1033{,}3\, gr$$

то је

(28) $$M = \rho_0 \int_0^\infty e^{-\frac{x}{H}} dx = \rho_0 H$$

па зато

(29) $$\sigma \Theta_m^4(x) = \frac{1}{2} a_0 (1-A)(1 + k M e^{-\frac{x}{H}}).$$

Ставимо

$$\Theta_m(x) = 273^0 + u_m(x)$$

т. ј. означимо са $u_m(x)$ средњу температуру за време периоде T уоченог атмосферског слоја, мерену у Целзиусовим степенима, то је квоцијенат $\frac{u_m(x)}{273}$ довољно мален број да се, према биномском обрасцу, може ставити

$$\Theta_m^4(x) = 273^4\left[1 + 4\frac{u_m(x)}{273}\right].$$

Зато је

$$273^4 \cdot \sigma + 4 \cdot 273^3 \sigma u_m(x) = \frac{1}{2} a_0 (1-A)(1 + k M e^{-\frac{x}{H}})$$

а како је за $x = 0$ $u_m(x) = u_0$, то добивамо, стављајући

(30) $$\frac{1}{8} \frac{a_0(1-A)}{273^3 \sigma} k M = b,$$

(31) $$u_m(x) = u_0 + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1).$$

Означимо са $u'(x,t)$ одступање варијабилне температуре $u(x,t)$ од њене средње вредности $u_m(x)$, т. ј.

(32) $$u'(x,t) = u(x,t) - u_m(x)$$

то је, пре свега,

(33) $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u'(x,t)}{\partial t}$$

а затим

$$\Theta(x,t) = 273 + u(x,t) = 273 + u_m(x) + u'(x,t) =$$
$$= 273 + u_0 + u'(x,t) + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1).$$

Означимо са Θ_0 апсолутно мерену средњу температуру $273^0 + u_0$ доњег ваздушног слоја, то је

$$\Theta(x,t) = \Theta_0 + u'(x,t) + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1).$$

Применимо поново биномски образац, узимајући при томе у обзир да су последња два сабирка горњег збира малена према првом, то добивамо, стављајући

(34) $$4 \sigma \Theta_0^3 = p$$

(35) $$\sigma \Theta^4(x,t) = \frac{1}{4} p \Theta_0 + p[u'(x,t) + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1)].$$

Због (32), (33) и (35) добивају једначине (22) до (26) овај облик

(36) $$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x} = k \rho_0 e^{-\frac{x}{H}} Z(x,t)$$

(37) $$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x} = c \rho_0 e^{-\frac{x}{H}} \frac{\partial u'(x,t)}{\partial t}$$

(38) $$\frac{\partial u'(x,t)}{\partial t} + 2\frac{kp}{c} u'(x,t) + 2\frac{kp}{c} b(e^{-\frac{x}{H}} - 1) + \frac{1}{2}\frac{kp}{c}\Theta_0 =$$
$$= \frac{k}{c} Y(x,t)$$

(39) $$Z(o,t) + (1-A)\left(a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{T} t\right) = \frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\, u'\left(o, t + \frac{T}{8}\right)$$

(40) $$Y(\infty, t) + Z(\infty, t) = 0.$$

V

Извршимо у претходним једначинама ову субституцију

(41) $$x = -H \log_{nat} z$$

па означимо функције Y, Z, u' у којима је та субституција изведена са $Y(z,t)$, $Z(z,t)$, $u'(z,t)$. Како је

$$z = e^{-\frac{x}{H}} \tag{42}$$

т. ј.

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial x} = \frac{\partial F(z,t)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{H} e^{-\frac{x}{H}} \frac{\partial F(z,t)}{\partial z}$$

а сем тога за

$$x = 0 \qquad z = 1$$

$$x = \infty \qquad z = 0$$

то ће оне једначине, узимајући још у обзир (28) добити овај облик

$$\frac{\partial Y(z,t)}{\partial z} = -k\, M\, Z(z,t) \tag{43}$$

$$\frac{\partial Z(z,t)}{\partial z} = -c\, M \frac{\partial u'(z,t)}{\partial t} \tag{44}$$

$$\frac{\partial u'(z,t)}{\partial t} + 2\frac{k\,p}{c} u'(z,t) + 2\frac{k\,p}{c} b(z-1) + \frac{1}{2}\frac{k\,p}{c}\Theta_0 = \frac{k}{c} Y(z,t) \tag{45}$$

$$Z(1,t) + (1-A)\left(a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{T} t\right) = \frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\, u'\left(1, t + \frac{T}{8}\right) \tag{46}$$

$$Y(o,t) + Z(o,t) = 0. \tag{47}$$

Диференцијалимо једначину (45) по z, то добивамо због (43)

$$\frac{\partial^2 u'(z,t)}{\partial z\, \partial t} + 2\frac{k\,p}{c}\frac{\partial u'(z,t)}{\partial z} + 2\frac{k\,p}{c} b = -\frac{k^2}{c} M\, Z(z,t). \tag{48}$$

Поновна диференцијација даје, узимајући у обзир (44)

$$\frac{\partial^3 u'(z,t)}{\partial z^2\, \partial t} + 2\frac{k\,p}{c}\frac{\partial^2 u'(z,t)}{\partial z^2} - k^2 M^2 \frac{\partial u'(z,t)}{\partial t} = 0. \tag{49}$$

Ставимо ли

$$u'(z,t) = e^{\alpha_i t + \beta_i z}$$

где су α_i и β_i константе, то ће предњи израз бити један партикуларни интеграл једначине (49) ако α_i и β_i задовоље једначину

$$\alpha_i \beta_i^2 + 2\frac{k\,p}{c}\beta_i^2 - k^2 M^2 \alpha_i = 0. \tag{50}$$

Зато ће и израз

$$u'(z,t) = C_1 + C_2 z + \sum_1^n G_i e^{\alpha_i t + \beta_i z} \tag{51}$$

где су $C_1, C_2, G_1, G_2, \ldots G_n$ произвољне константе, бити партикуларни интеграл једначине (49), ако само парови α_i, β_i; $\alpha_2, \beta_2; \ldots \alpha_n, \beta_n$ задовоље редом једначину (50). У горњем изразу ваља ставити

$$C_1 = 0 \tag{52}$$

$$C_2 = 0 \tag{53}$$

према самој дефиницији функције

$$u'(z,t).$$

Предњем интегралу одговарају ови интеграли једначина (44) и (43)

$$Z(z,t) = C_3 - c\, M \sum_1^n \frac{\alpha_i}{\beta_i} G_i e^{\alpha_i t + \beta_i z}$$

$$Y(z,t) = C_4 - k\, M\, C_3 z + k\, c\, M^2 \sum_1^n \frac{\alpha_i}{\beta_i^2} G_i e^{\alpha_i t + \beta_i z}$$

где би C_3 и C_4 могле бити, бар за сада, функције од t. Но ставимо ли предња три израза у (48) и (45), то добивамо

$$\sum_1^n \frac{1}{\beta_i}\left(\alpha_i \beta_i^2 + 2\frac{k\,p}{c}\beta_i^2 - k^2 M^2 \alpha_i\right) G_i e^{\alpha_i t + \beta_i z} + \\ + \frac{k}{c}(2pC_2 + 2pb + k\,M\,C_3) = 0$$

$$\sum_i^n \frac{1}{\beta_i^2}\left(\alpha_i \beta_i^2 + 2\frac{k\,p}{c}\beta_i^2 - k^2 M^2 \alpha_i\right) G_i\, {}^{\alpha_i t + \beta_i z} + \\ + \frac{k}{c}\left[(2pC_2 + 2pb + k\,M\,C_3) z + \frac{1}{2} p\,\Theta_0 - C_4 + 2pC_1 - 2pb\right] = 0$$

т. ј. због (50), (52) и (53)

$$k\,M\,C_3 + 2pb = 0 \tag{54}$$

$$-C_4 + \frac{1}{2} p\,\Theta_0 - 2pb = 0 \tag{55}$$

чиме су и константе C_3 и C_4 одређене.

VI

Константама α_i, β_i, G_i, ваља дати такве вредности да гранични услови (46) и (47) буду задовољени. Величине $u'(z,t)$, $Y(z,t)$ и $Z(z,t)$ морају, по самој природи проблема, бити периодичке функције времена са периодом T, а то ће бити онда кад константе α_i буду имале овај облик

$$\alpha_i = \pm\, i\frac{2\pi}{T}n$$

где је n цео број. Одаберимо ове две вредности

$$\alpha_1 = i\frac{2\pi}{T} \qquad \alpha_2 = -\, i\frac{2\pi}{T} \tag{56}$$

њима одговарају конјугирано комплексне вредности констаната β_1 и β_2 овог облика

$$\beta_1 = R + iP \qquad \beta_2 = R - iP \tag{57}$$

где су R у P реални бројеви. Ставимо (56) и (57) у (50) и изједначимо реалне односно имагинарне делове те једначине. Ако при том, краткоће ради уведемо помоћну реалну и позитивну константу

$$r^2 = \frac{\pi c k^2 M^2}{\pi^2 c^2 + k^2 p^2 T^2} \tag{58}$$

добићемо

$$R^2 - P^2 = 2\pi c r^2$$

$$PR = pkT^2 r^2$$

а одавде

$$R^2 = r^2\left(\sqrt{\pi^2 c^2 + k^2 p^2 T^2} + \pi c\right). \tag{59}$$

Овде је пред кореном дозвољен само позитивни знак, јер је само тада R реално. Даље следује

$$P^2 = r^2\left(\sqrt{\pi^2 c^2 + k^2 p^2 T^2} - \pi c\right). \tag{60}$$

Константе R и P добивене корењовањем предњих израза смеју бити и позитивне и негативне, па означимо ли са R и P њихове позитивне вредности, добивамо ова четири пара констаната α и β.

$$\alpha_1 = i\frac{2\pi}{T} \qquad \alpha_2 = -\, i\frac{2\pi}{T} \qquad \alpha_3 = i\frac{2\pi}{T} \qquad \alpha_4 = -\, i\frac{2\pi}{T}$$

$$\beta_1 = R + iP \qquad \beta_2 = R - iP \qquad \beta_3 = -R - iP \qquad \beta_4 = -R + iP,$$

Стављајући ове вредности у (51), применивши затим образац

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$$

и заменивши произвољне константе

$$(G_1 + G_2), \qquad i(G_1 - G_2), \qquad (G_3 + G_4), \qquad i(G_3 - G_4)$$

редом са

$$C_5 \qquad C_6 \qquad C_7 \qquad C_8$$

добивамо за $u'(z,t)$ овај израз

$$\begin{aligned} u'(z,t) = & \\ = \; & e^{Rz}\left\{C_5 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) + C_6 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right)\right\} + \\ & + e^{-Rz}\left\{C_7 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right) + C_8 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right)\right\}. \end{aligned} \tag{61}$$

Једначина (44) даје

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z(z,t)}{\partial z} = & \frac{2\pi}{T} c M e^{Rz}\left\{C_5 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) - C_6 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right)\right\} + \\ & + \frac{2\pi}{T} c M e^{-Rz}\left\{C_7 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right) - C_8 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right)\right\}. \end{aligned}$$

Како је:

$$\begin{aligned} \int e^{Rz} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) dz = & \\ = & \frac{e^{Rz}}{R^2 + P^2}\left\{R \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) - P \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right)\right\} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{Rz} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) dz = & \\ = & \frac{e^{Rz}}{R^2 + P^2}\left\{R \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) + P \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right)\right\} + C \end{aligned}$$

то је, узимајући у обзир још и (52),

$$Z(z,t) = C_3 + \tag{62}$$

$$+ \frac{2\pi}{T}\frac{cM}{R^2+P^2}\, e^{Rz}\left\{(RC_5 - PC_6)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) - \right.$$

$$\left. -(PC_5 + RC_6)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right)\right\} +$$

$$+ \frac{2\pi}{T}\frac{cM}{R^2+P^2}\, e^{-Rz}\left\{(-RC_7 + PC_8)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right) + \right.$$

$$\left. + (PC_7 + RC_8)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right)\right\}.$$

Исто тако добивамо помоћу (43)

$$Y(z,t) = C_4 - kMC_3 z - \tag{63}$$

$$- \frac{2\pi}{T}\frac{kcM^2}{(R^2+P^2)^2}\, e^{Rz}\left\{[(R^2-P^2)C_5 - 2PRC_6]\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) - \right.$$

$$\left. - [(R^2-P^2)C_6 + 2PRC_5]\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right)\right\} -$$

$$- \frac{2\pi}{T}\frac{kcM^2}{(R^2+P^2)^2}\, {}^{-Rz}\left\{[(R^2-P^2)C_7 - 2PRC_8]\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right) - \right.$$

$$\left. - [(R^2-P^2)C_8 + 2PRC_7]\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right)\right\}.$$

Ставимо ли ове изразе у гранични услов (47) па захтевамо да он буде за свако t задовољен, то добивамо ове једначине:

$$C_3 + C_4 = 0 \tag{64}$$

$$\left[R - \frac{kM}{R^2+P^2}(R^2-P^2)\right]C_5 + \left[-P + \frac{2kM}{R^2+P^2}PR\right]C_6 + \tag{65}$$

$$+ \left[-R - \frac{kM}{R^2+P^2}(R^2-P^2)\right]C_7 + \left[P + \frac{2kM}{R^2+P^2}PR\right]C_8 = 0$$

$$\left[-P + \frac{2kM}{R^2+P^2}PR\right]C_5 + \left[-R + \frac{kM}{R^2+P^2}(R^2-P^2)\right]C_6 + \tag{66}$$

$$+ \left[P + \frac{2kM}{R^2+P^2}RP\right]C_7 + \left[R + \frac{kM}{R^2+P^2}(R^2-P^2)\right]C_8 = 0$$

$$(1-A)a_0 + C_3 = 0 \tag{67}$$

$$\frac{2\pi}{T}\frac{cM}{R^2+P^2}\, e^{R}[(RC_5 - PC_6)\cos P + (PC_5 + RC_6)\sin P] + \tag{68}$$

$$+ \frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\, e^{R}\left[C_5 \sin\left(\frac{\pi}{4} + P\right) - C_6\cos\left(\frac{\pi}{4} + P\right)\right] +$$

$$+ \frac{2\pi}{T}\frac{cM}{R^2+P^2}\, e^{-R}[(-RC_7 + PC_8)\cos P + (PC_7 + RC_8)\sin P] +$$

$$+ \frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\, e^{-R}\left[C_7 \sin\left(\frac{\pi}{4} - P\right) - C_8\cos\left(\frac{\pi}{4} - P\right)\right] = 0$$

$$\frac{2\pi}{T}\frac{cM}{R^2+P^2}\, e^{R}[(RC_5 - PC_6)\sin P - (PC_5 + RC_6)\cos P] - \tag{69}$$

$$- \frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\, e^{R}\left[C_5 \cos\left(\frac{\pi}{4} + P\right) + C_6\sin\left(\frac{\pi}{4} + P\right)\right] +$$

$$+ \frac{2\pi}{T}\frac{cM}{R^2+P^2}\, e^{-R}[(RC_7 - PC_8)\sin P + (PC_7 + RC_8)\cos P] -$$

$$- \frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\, e^{-R}\left[C_7 \cos\left(\frac{\pi}{4} - P\right) + C_8\sin\left(\frac{\pi}{4} - P\right)\right] +$$

$$+ (1-A)a_1 = 0.$$

Из (64) и (67) следује

$$C_3 = -(1-A)a_0 \tag{70}$$

$$C_3 = (1-A)a_0. \tag{61}$$

Ставе ли се ове вредности у (54) и (55) то из њих следује

$$\sigma\Theta_0^4 = \frac{1}{2}a_0(1-A)(1+kM). \tag{72}$$

Ова се једначина подудара са (29), ако се у овој стави $x = 0$, $\Theta_m(x) = \Theta_0$.

VII

Када се ради о годишњем току температуре, т. ј. када се стави $T = 525960^m$, онда је πc занемариво према kpT, па је у том случају

$$r^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi c}{p^2T^2}M^2 \tag{73}$$

$$R^2 = P^2 = kpTr^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi ck}{pT}M^2. \tag{74}$$

Једначине (65), (66), (68), (69) добивају сада овај облик

(75) $$C_5 - C_6 - C_7 + C_8 + \frac{kM}{P}(C_6 + C_8) = 0$$

(76) $$C_5 + C_6 - C_7 - C_8 - \frac{kM}{P}(C_5 + C_7) = 0$$

(77) $$\frac{\pi}{T}\frac{cM}{P}e^P[(C_5 - C_6)\cos P + (C_5 + C_6)\sin P] + $$
$$+\frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\,e^P\left[C_5\sin\left(\frac{\pi}{4}+P\right) - C_6\cos\left(\frac{\pi}{4}+P\right)\right] +$$
$$+\frac{\pi}{T}\frac{cM}{P}e^{-P}[(-C_7 + C_8)\cos P + (C_7 + C_8)\sin P] +$$
$$+\frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\,e^{-P}\left[C_7\sin\left(\frac{\pi}{4}-P\right) - C_8\cos\left(\frac{\pi}{4}-P\right)\right] = 0$$

(78) $$\frac{\pi}{T}\frac{cM}{P}\,e^P[(C_5 - C_6)\sin P - (C_5 + C_6)\cos P] -$$
$$-\frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\,e^P\left[C_5\cos\left(\frac{\pi}{4}+P\right) + C_6\sin\left(\frac{\pi}{4}+P\right)\right] +$$
$$+\frac{\pi}{T}\frac{cM}{P}e^{-P}[(C_7 - C_8)\sin P + (C_7 + C_8)\cos P] -$$
$$-\frac{K}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\,e^{-P}\left[C_7\cos\left(\frac{\pi}{4}-P\right) + C_8\sin\left(\frac{\pi}{4}-P\right)\right] +$$
$$+(1 - A)\,a_1 = 0.$$

Место једначине (61) добивамо ову:

(79) $$u'(z,t) = e^{Pz}\left\{C_5\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) + C_6\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right)\right\} +$$
$$+ e^{-Pz}\left\{C_7\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right) + C_8\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right)\right\}.$$

VIII

Приступимо сада дефинитивним нумеричким резултатима овога рада, и испитајмо годишњи ток температуре у појединим слојевима атмосфере. Узимајући за јединицу масе грам, за јединицу дужине центиметар, а за јединицу времена минуту, ваља у предње једначине ставити $T = 525960$; $M = 1033{,}3$. Ова два

броја одређена су са свом тачности. И специфична топлота ваздуха при константној запремини одређена је тачно са $c = 0{,}17$. За коефициенте спроводљивости тла одаберимо у горњим јединицама ове вредности $m = 1{,}00$; $K = 0{,}50$. Да бисмо добивене резултате могли директно надовезати на оне, већ споменуте резултате нашег рачуна о средњим годишњим температурама атмосферских слојева над централном Европом, ставићемо $u_0 = 10{,}5^0$, т. ј. $\Theta_0 = 283{,}5^0$. Одавде следује са константном Стефановог закона $\sigma = 0{,}76 \times 10^{-10}$ ова вредност $p = 0{,}00693$. За величину k одабиремо број $k = 0{,}00245$ који се показао као поуздан при оним споменутим рачунима. Са горњим бројевима добивамо $P = 0{,}43790$. Зато је $e^P = 1{,}5495$, $e^{-P} = 0{,}6454$. У угловној мери је $P = 25^0\,5'\,25''$. Стављајући за рефлексиону способност Земље и њене атмосфере $A = 0{,}40$, број који је такође више пута рачунски опробан, добивамо помоћу једначина (75) до (78) за константе C_5, C_6, C_7 и C_8 ове нумеричке вредности

$$C_5 = 31{,}015\,a_1 \qquad C_6 = 66{,}451\,a_1$$
$$C_7 = -4{,}415\,a_1 \qquad C_8 = -52{,}083\,a_1$$

При томе означава, према (9), величина a_1 половину амплитуде годишњег тока инсолације.

На тај начин добивамо за температуру $u'(z,t)$ овај израз:

(80) $$u'(z,t) = a_1 \cdot 1{,}5495^z\left\{31{,}051\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 0{,}4379\,z\right) + \right.$$
$$\left. + 66{,}451\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + 0{,}4379\,z\right)\right\} -$$
$$- a_1\,0{,}6454^z\left\{4{,}415\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - 0{,}4379\,z\right) + \right.$$
$$\left. + 52{,}083\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 0{,}4379\,z\right)\right\}.$$

При томе је, према (42),

(81) $$z = e^{-\frac{x}{8000}}$$

где x означава висину изнад површине Земљине, мерену у метрима.

Веза између $u'(x,t)$ и $u(x,t)$ дата је, према (32), са

$$u(x,t) = u_m(x) + u'(x,t).$$

При томе је за израчунавање температуре $u_m(x)$ боље место једначине (31) употребити једначину (29) која је егзактнија. Она добива сада овај облик:

$$\sigma\Theta_m^4(x) = 0{,}30\left(1 + 2{,}5316\, e^{-\frac{x}{8000}}\right) a_0 .$$

Како за $x = 0$ добивамо

$$\sigma\Theta_0^4 = 1{,}0595\, a_0,$$

то са $\Theta_0 = 283{,}5$ добивамо $a_0 = 0{,}46334$. Оваква средња годишња инсолација одговарала би 43^0 географске ширине. Ту је амплитуда годишњег тока инсолације једнака 0,49 калорија, т. ј. ту је $a_1 = 0{,}245$. Стављајући све ове вредности у предње једначине добићемо температуру u као функцију висине x и времена t. Једначина

$$u(x, t) = C$$

представља нам једначину термичке изоплете, која одговара температури C.

IX

За доњи слој ваздуха ваља ставити $x = 0$, т. ј. $z = 1$, па је ту годишњи ток температуре представљен једначином

$$\begin{aligned} u(o, t) = u_0 + {} & 48{,}112\, a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 25^0\, 5'\, 25''\right) + \\ & + 102{,}962\, a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + 25^0\, 5'\, 25''\right) - \\ & - 2{,}849\, a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - 25^0\, 5'\, 25''\right) - \\ & - 33{,}613\, a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 25^0\, 5'\, 25''\right). \end{aligned}$$

Даље израчунавање даје

$$u(o, t) = u_0 + 98{,}907\, a_1 \cos\frac{2\pi}{T}t + 41{,}195\, a_1 \sin\frac{2\pi}{T}t.$$

Стављајући

$$B\cos\epsilon = 98{,}907$$

$$B\sin\epsilon = 41{,}105$$

добива предња једначина овај облик

$$u(o, t) = u_0 + B\, a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \epsilon\right)$$

а како је

$$B^2 = 98{,}907^2 + 41{,}195^2$$

$$tang\,\epsilon = \frac{41{,}195}{98{,}907}$$

то одавде следује

$$u(o, t) = u_0 + 108{,}39\, a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - 22^0\, 36'\, 43''\right).$$

Фаза изражена у временској мери, једнака је

$$\frac{22^0\, 36'\, 43''}{360^0} \cdot 365{,}25^d = 22^d\, 22^h\, 36^m$$

па је зато

$$u(o, t) = u_0 + 108{,}39\, a_1 \cos\frac{2\pi}{T}(t - 22^d\, 22^h\, 36^m).$$

Истим путем може се израз за $u(x, t)$ при произвољном x довести на овај облик

$$u(x, t) = u_m(x) + a_1 B(x) \cos\frac{2\pi}{T}[t - \epsilon(x)].$$

При томе имају $\epsilon(x)$ односно $B(x)$ ово значење. $\epsilon(x)$ представља задоцњавање температурних екстрема иза екстрема инсолације. Заиста, инсолација $W_1(t)$ достизава своју максималну односно минималну вредност у временима $t = 0$ односно $t = \frac{T}{2}$, док температура ваздуха у висини x достиже своје екстремне вредности за $t - \epsilon(x) = 0$ и $t - \epsilon(x) = \frac{T}{2}$. Амплитуда годишњег тока температуре у висини x представљена је, према предњој једначини, изразом $2a_1 B(x)$, а амплитуда годишњег тока инсолације изразом $2a_1$, зато $B(x)$ представља однос амплитуде температуре и амплитуде инсолације. У приложеној табели унешене су нумеричке вредности величина $\epsilon(x)$ односно $B(x)$ за разне висине x. Последња колона те табеле садржи односе $B(x) : B(o)$ који показују слабљење температурних амплитуда са висином. Та табела показује да ће, према изложеној теорији температурни екстреми доњег слоја ваздуха задоцнити иза инсолационих, т. j. иза солстиција за $22^d\, 22^h\, 36^m$. Израчунамо ли аритметску средину тих задоцњења за целу тропосферу, т. ј. за доњих десет километара атмосфериних то добивамо задоцњење од 26 дана 8 сати. Подударање ових бројева са резултатима опажања показује да саопштена теоријска размотрања решавају један важан, до сада нерешени, проблем климатологије.

x km	$\epsilon(x)$	$B(x)$	$B(x):B(o)$
0	$22^d\ 22^h\ 36^m$	108,39	1,0000
1	$24^d\ 1^h\ 54^m$	98,04	0,9045
2	$24^d\ 23^h\ 32^m$	90,03	0,8306
4	$26^d\ 7^h\ 32^m$	76,77	0,7083
6	$27^d\ 4^h\ 5^m$	66,47	0,6133
8	$27^d\ 17^h\ 25^m$	58,46	0,5394
10	$28^d\ 2^h\ 23^m$	52,22	0,4818
12	$28^d\ 8^h\ 0^m$	47,36	0,4370
15	$28^d\ 12^h\ 42^m$	42,02	0,3877
∞	$28^d\ 18^h\ 10^m$	30,26	0,2792

LES OSCILLATIONS DE TEMPÉRATURE DANS LES DIVERS COUCHES DE L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE

PAR M. MILANKOVITCH

(Résumé)

En continuant ses recherches publiées dans son ouvrage „Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire“ (Paris 1920), l'auteur donne une solution complète du problème mathématique concernant le rapport entre l'insolation et la température de l'atmosphère terrestre pour le cas d'une insolation variable et en tennant compte du conductibilité du sol. Le résultat le plus important de ces recherches théoriques poussées jusqu'aux données numériques est celui que les extrêmes de la température de la couche inférieure de l'atmosphère s'attardent, d'après les calculs de l'auteur, après le solstice d'été resp. après le solstice d'hiver de 22 jours, 22 heures, 36 minutes. La moyenne de ce retard calculée pour toute la troposphère est 26 jours, 8 heures.