ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ МАТЕМАТСКЕ КЛИМЕ

од
Д-р. М. МИЛАНКОВИЋА.

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 5. априла 1912. г);

Под математском или соларном климом разумевамо ону климу која би се на површини земље указала када земља неби била опкољена атмосфером и кад би имала свугде круту површину.

Познавање те хипотетске климе корисно је и за проучавање особина фактичне климе на земљи, јер се то познавање може сматрати као прво решење општега проблема земаљске климе када се утицаји атмосфере и морских струја сматрају као секундарни утицаји. Сва одступања фактичне климе од те математске климе имају се, према томе, приписати тима секундарнима утицајима, па је решењем проблема математске климе и проучавање тих секундарних утицаја олакшано, јер су ефекти тих утицаја одељени од ефеката примарних.

Trabert се је у својој расправи Das solare Klima. Meteor. Zeitschr. Novemb. 1894. бавио проблемом математске климе и ставио себи у задатак да одреди средње месечне температуре које би се указале на разним географским ширинама када земља неби била опкољена атмосфером. Температуре које је он одредио разликују се веома знатно од фактичних температура. Тако би — по његовом рачуну — на половима земље владала за време полугодишње ноћи температура од — 273°C, тј. температура абсолутне нуле, док би средња температура месеца јуна била на полу 82°C.

То велико одступање од фактичне климе потиче — као што ћемо у овој расправи да докажемо — од тога што је Trabert занемарио један важан фактор који утиче на соларну климу: спровођење топлотних множина у унутрашњост земље и обратно. Узме ли се тај утицај и новија испитивања о соларној константи у обзир, то је могуће из чисто физикалних претпоставака конструисати хипотетску соларну климу која се знатно мање разликује од ефективне него Trabert-ова.

Ми ћемо се у овој радњи бавити теоријом те хипотетске климе која се математским сретствима даде конструисати и чија је одредба један проблем теоријске физике.

Замислимо ли површину земље солидифицирану и лишену атмосфере, то ће температура једнога произвољнога њенога места бити последица следећа три утицаја: инсолације, радијације и кондукције.

Под инсолацијом разумевамо довађање топлотних множина на површину земље услед сунчевог зрачења. Услед тога утицаја довађа се на једном произвољном месту земље на јединицу површине а у јединици времена множина топлоте која је, ако се ексцентрицитет земљине путање не узме у обзир, једнака:

$$A J \cos z$$

при чему z означава зенитску дистанцију сунца у уоченом моменту, J соларну константу а A абсорбцију земаљске површине. Зенитска дистанција z, која зависи од географске ширине посматраног места и од дневнога и годишњега доба уоченога момента, може се одредити рачуном, остале две константне величине J и A одређују се експерименталним путем па се зато утицај инсолације може одредити довољном тачности.

Под радијацијом разумевамо зрачење топлотних множина са површине земље у интерпланетарни простор. Како је температура интерпланетарнога простора блиска абсолутној нули или температури од — 273° Celsius-a, то ће, ако је T абсолутна температура површине у уоченом моменту јединица површине земљине одашиљати у јединици времена у интерпланетарни простор множину топлоте која је, према Stefan-овом закону, једнака:

$$\sigma E T^4$$

где је σ константа Stefan-овог закона, а E емисиони коефициенат земљине површине. Када би та површина била потпуно црна онда би тај коефициенат био једнак јединици, овако је једнак абсорбционом коефициенту A, па је зато горња множина топлоте једнака

$$\sigma . A T^4.$$

И та се множина може одредити довољном тачности.

Под кондукцијом разумевамо спровађање топлотних множина са површине земље у њену унутрашњост (и обратно) услед тога што температура површине није једнака температури суседних јој слојева. Када су ови хладнији од површине земљине онда наступа струјање топлотних множина према унутрашњости земље, а у обрнутом смислу када су они топлији. То кретање топлотних множина регулисано је Fourier-овом теоријом спровађања топлоте па се, према томе, може и тај утицај одредити те ћемо при тој одредби наћи једино на потешкоће математске природе, но које ће се моћи савладати.

Када нам на тај начин пође за руком да одредимо све топлотне множине, које се течајем године доважају и одважају са површине земље, онда ће бити могуће одредити температуру земљине површине у произвољном моменту времена и на тај начин конструисати слику математске климе. Но пре но што приступимо томе задатку испитајмо квалитативну страну трећега утицаја на математску климу, кондукције, који Trabert није узео у обзир.

Позната је чињеница, а она следује и из Fourier-ове теорије спровађања топлоте, да се промене температуре на површини земље већ у доста маленој дубини не опажају. Тако се може, према Trabert-у, узети[1]), да се на континенту у дубини од 10 m температура не мења временом. Зато је довољно да при испитивању кретања топлотних множина узмемо само горњи слој земљине коре у дебљини од 10 m у обзир. Доња површина тога слоја има, на једном уоченом месту земље, константну температуру, блиску средњој годишњој температури горње површине која се периодички мења. У летно доба године биће средња дневна температура горње површине посматранога слоја виша од температуре, на којој се стално одржава доња површина слоја, па ће зато, у то доба године наступити спровађање топлотних множина у унутрашњост земље, а то ће имати за последицу да

---

[1]) Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik, Leipzig 1911., стр. 502. У Београду је у дубини од 14 m температура константна, а њене варијације на дубини од 10 m веома малене. Види: Vujević, Ueber Bodentemperaturen in Belgrad. Meteor. Zeitschr., Heft 7, 1911.

ће температура површине бити мања него што би била без тога спровађања, дакле мања него што следује из Trabert-ових претпоставака. Обратно ће у зимско доба године наступити спровађање топлотних множина из унутрашњости земље ка површини што ће имати за последицу повишење температуре на површини. Квалитативни утицај кондукције састоји се, дакле, у томе, да она снижава температуру површине лети, а повишава зими.

Пошто смо тако добили апроксимативну слику утицаја кондукције приступимо математској одредби њених ефеката.

У то име можемо посматрани слој земљине коре сматрати на уоченом месту као равну плочу, јер је његов радиус кривине — једнак радиусу земљине кугле — веома велик, а на топлотно стање уоченога места утиче само непосредна околина. Због тога се распоред температуре широм обеју површина те плоче — а и широм свакога равног пресека паралелног тима површинама — може сматрати као униформан, па ће спровађање топлоте на посматраном делу земљине коре бити регулисано Fourier-овом једначином:

$$\frac{\partial u}{dt} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \ldots 1),$$

при чему x означава одстојање произвољне тачке у унутрашњости плоче од њене горње површине, u температуру те тачке, t време, а a^2 коефицијенат унутарње спроводљивости земљине коре. Означимо ли са k спроводљивост топлоте, са c специфичну топлоту, а са ρ специфичну густину земљине коре, то је:

$$a^2 = \frac{k}{c\rho} \quad \ldots 2)$$

Дебљину плоче, која према пређашњем, изнаша каквих 10 m, означимо општије са h. Та је величина свакако тако одабрана да се на доњој површини плоче више не осећају осцилације температуре њене горње површине а то значи, према познатој теорији топлотних осцилација на површини земље, да је h тако велико да се израз

$$e^{-\frac{h}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

(где је τ периода осцилација) може занемарити.

За интеграцију парцијалне диференцијалне једначине потребни су нам гранични услови; ти услови дати су нам топлотним стањима на граничним површинама посматране плоче. Горња површина изложена је променама температуре које зависе од времена. Зато је:

$$\left.\begin{array}{l} \text{за } x = o \\ u = f(t) \end{array}\right\} \quad \ldots 3),$$

Температура доње површине је константна т. ј.

$$\left.\begin{array}{l} \text{за } x = h \\ u = u_0 = const. \end{array}\right\} \quad \ldots 4)$$

Функција $f(t)$ граничног услова 3) још је неодређена, па ју ваља заменити одређеном.

У радовима, који се баве теоријом спровађања топлоте у унутрашњост земље, претпоставља се, обично, да су осцилације температуре на површини земље хармоничне, т. ј. претстављене функцијом:

$$a \cos \frac{2\pi}{T} t$$

где T означава дужину дана (24^h). Ми се са тако једноставном претпоставком не можемо задовољити него морамо поред дневних узети у обзир и годишње осцилације температуре.

Варијације температуре на површини земље претстављају суперпозицију дневних и годишњих варијација од којих свака има осцилаторан карактер, па је периода првих 24^h а других година. Функцији $f(t)$ ваља, према томе, дати такав облик да показује тај двоструко осцилаторан карактер. Функција, која задовољава тима условима, је косинус зенитске дистанције, па како је она и узрок двоструко осцилаторног карактера варијације температура на површини земље — најважнији фактор загревања земљине површине инсолација пропорционалан је косинусу зенитске дистанције — то ћемо претпоставити да је функција $f(t)$ исте природе.

Косинус зенитске дистанције z дат је једначином:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega \quad \cdot \cdot \cdot \; 5),$$

где је φ географска ширина посматранога места на земљи, δ деклинација сунца, а ω сатни угао. На једном одређеном месту земље је φ константно, δ је периодична функција времена са периодом од једне године, а ω је периодична функција времена са периодом од 24^h.

Означимо ли са t сунчано дневно доба — бројано од подне до подне — а са τ интервал од 24 сунчаних сати то је

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} t \quad \cdot \cdot \cdot \; 6).$$

Зато је:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \frac{2\pi}{\tau} t \quad \cdot \cdot \; 7)$$

У горњој једначини није интервал τ — због неједнакости сунчаних сати — потпуно константан, но ми можемо без осетљиве погрешке сунчано време t заменити са средњим временом онда је τ константно и једнако 24^h средњега времена.

Претпостављамо да је функција $f(t)$ пропорционална функцији 7), па стављамо:

$$f(t) = c. \sin \varphi \sin \delta + c. \cos \varphi \cos \delta \cdot \cos \frac{2\pi}{t} t \quad \cdot \; 8)$$

У горњој је једначини и величина δ функција времена:

$$\delta = \psi(t) \quad \cdot \cdot \cdot \; 9)$$

са овим особинама: њена је максимална вредност 23° 30' или у лучној мери 0·41, она, растећи непрестано од вредности нула, достизава своју максималну вредност тек по измаку интервала од једне четвртине године; њено рашћење је веома споро па је максимална вредност извода $\psi'(t)$:

$$\max \psi'(t) = 0.0064 \text{ (по дану)}$$

Због тога ће се величина $\psi'(t)$ моћи у извесним случајевима занемарити.

Наш је следећи задатак, према томе, овај: Ваља наћи интеграл једначине 1) који задовољава ове граничне услове:

$$\left.\begin{aligned} &\text{за } x = o \\ &u = f(t) = c \sin \varphi \sin \psi(t) + c \cos \varphi \cos \psi(t) \cos \frac{2\pi}{\tau} t \end{aligned}\right\} \; 10)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{за } x &= h \\ u &= u_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \; 11)$$

При томе је извод $\psi'(t)$ веома мален, а h је одабрано тако да је израз

$$e^{-\frac{h}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

занемарив.

Ставимо:

$$u = c \sin\varphi \sin\psi(t) + \frac{u_0 - c \sin\varphi \sin\psi(t)}{h} x +$$
$$+ c \cos\varphi \cos\psi(t)\, e^{\alpha t + \beta x} \quad \dots \quad 12)$$

Ова функција задовољава, ако се α и β згодно одаберу, једначину 1) јер је:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\left(1 - \frac{x}{h}\right) \sin\varphi \cos\psi(t)\, \psi'(t) -$$
$$- c \cos\varphi \sin\psi(t)\, e^{\alpha t + \beta x} \psi'(t) + \alpha c \cos\varphi \cos\psi(t)\, e^{\alpha t + \beta x}$$

но како је $\psi'(t)$ занемариво, то је:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha c \cos\varphi \cos\psi(t).\, e^{\alpha t + \beta x} \quad \dots \quad 13)$$

Сем тога је:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta^2 c \cos\varphi \cos\psi(t)\, e^{\alpha t + \beta x} \quad \dots \quad 14)$$

Ставимо ли вредности 13) и 14) у једначину 1) то видимо да ће она бити задовољена ако буде:

$$\alpha = a^2 \beta^2$$

Претпоставимо да је β комплексно, тј. ставимо место β редом један од следећих двају израза:

$$p + i\beta$$
$$p - i\beta$$

а место α:

$$a^2 (p + i\beta)^2 = a^2 (p^2 - \beta^2) + 2 i \beta p a^2$$
$$a^2 (p - i\beta)^2 = a^2 (p^2 - \beta^2) - 2 i \beta p a^2$$

На тај начин можемо место величине:

$$e^{\alpha t + \beta x}$$

ставити једну од ових двеју:

$$e^{a^2 (p^2 - \beta^2) t + 2 i \beta p a^2 t + p x + i \beta x}$$
$$e^{a^2 (p^2 - \beta^2) t - 2 i \beta p a^2 t + p x - i \beta x}$$

које можемо склопити у општију ако прву помножимо са константом A другу са константом B па их саберемо. На тај начин можемо последњи члан једначине 12) заменити изразом:

$$c \cos\varphi \cos\psi(t)\, .\, e^{a^2 (p^2 - \beta^2) t + px} \Big\{ A.\, e^{i\beta (x + 2pa^2 t)} +$$
$$+ B\, e^{-i\beta (x + 2pa^2 t)} \Big\}$$

Употребив Euler-ове обрасце можемо горњем изразу дати овај облик:

$$c \cos\varphi \cos\psi(t)\, e^{a^2 (p^2 - \beta^2) t + px} \Big\{ (A + B) \cos\beta (x + 2pa^2 t) +$$
$$+ i (A - B) \sin\beta (x + 2pa^2 t) \Big\}$$

Ставимо:

$$A + B = C_1 \qquad i (A - B) = C_2$$

где су дакле C_1 и C_2 опет константе, а сем тога узмимо $p = \beta$, то горњи израз добива овај облик:

$$c \cos\varphi \cos\psi(t)\, e^{px} \Big\{ C_1 \cos (px + 2p^2 a^2 t) +$$
$$+ C_2 \sin (px + 2p^2 a^2 t \Big\}$$

Функцији 12) можемо, према томе, дати овај облик:

$$u = c\,sin\,\varphi\,sin\,\psi\,(t) + \frac{u_0 - c\,sin\,\varphi\,sin\,\psi\,(t)}{h}\,x +$$

$$+ c\,cos\,\varphi\,cos\,\psi(t)\,e^{px}\left\{ C_1\,cos\,(px + 2p^2a^2t) + \right.$$

$$\left. + C_2\,sin\,(px + 2p^2a^2t)\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; 15)$$

Ова функција задовољава једначину 2) а формирана је у таквом облику да при згодном избору констаната задовољава и граничне услове 10) и 11), јер ставимо ли:

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 0$$

$$p = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}$$

то добивамо:

$$u = c\,sin\,\varphi\,sin\,\psi\,(t) + \frac{u_0 - c\,sin\,\varphi\,sin\,\psi\,(t)}{h}\,x +$$

$$+ c\,e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}\,cos\,\varphi\,cos\,\psi\,(t)\,cos\left(2\pi\frac{t}{\tau} - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right) \; \cdot \; 16)$$

Ставимо ли у овој функцији:

$$x = o$$

то добивамо:

$$u = c\,sin\,\varphi\,sin\,\psi\,(t) + c\,cos\,\varphi\,cos\,\psi\,(t)\,cos\,\frac{2\pi}{\tau}\,t$$

зато она задовољава гранични услов 10).

Ставимо ли у функцији 16):

$$x = h,$$

то добивамо:

$$u = u_0 + c\,e^{-\frac{h}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}\,cos\,\varphi\,cos\,\psi\,(t)\,cos\left(2\pi\frac{t}{\tau} - \frac{h}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right)$$

но како је:

$$e^{-\frac{h}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

занемариво, то је

$$\text{за} \quad x = h$$

$$u = u_0$$

дакле је и гранични услов 11) задовољен. Зато нам једначина 16) претставља тражени интеграл парцијалне диференцијалне једначине 1) и даје нам закон по којем варирају температуре у посматраној плочи са дубином x и са временом t.

Из једначине 16) следује да је температура посматранога дела земаљске коре двоструко осцилаторна функција; периода малих осцилација је $\tau = 24^h$ а великих година. Испитујемо ли промене температуре, што се дешавају у току једнога дана на дубини x, то можемо изразе:

$$c\,sin\,\varphi\,sin\,\psi\,(t) = m$$

$$c\,coc\,\varphi\,cos\,\psi\,(t) = n$$

сматрати константнима за време тога интервала, па ће температура дубине x бити дата једначином:

$$u = m + \frac{u_0 - m}{h}\,x + n e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}\,cos\left(2\pi\frac{t}{\tau} - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right) \; 16^*)$$

Означимо са u_τ средњу дневну температуру у дубини x, то је она представљена изразом:

$$u_\tau = \frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} u dt$$

т. ј.

$$u_\tau = m + \frac{u_0 - m}{h} x + \frac{n}{\tau} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \cos\left(2\pi\frac{t}{\tau} - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right) dt$$

но како је:

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \cos\left(2\pi\frac{t}{\tau} - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right) dt = 0$$

то је средња дневна температура на дубини x дата изразом:

$$u_\tau = m + \frac{u_0 - m}{h} x \quad \cdot \cdot \cdot \cdot 17).$$

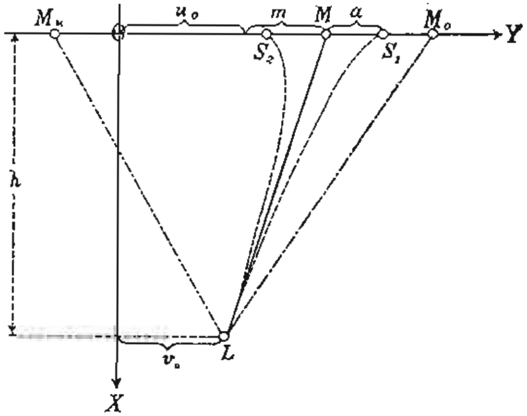
На горњој површини, тј. за $x = o$ је средња дневна температура

$$u_\tau = m$$

а на дубини $x = h$ је средња дневна температура

$$u_\tau = u_0$$

Једначина 17) показује да се средње дневне температуре u_τ мењају са дубином линеарно. Пренесемо ли, према томе, на ортогоналном координатном систему као абсцису дубину x посматранога слоја земљине коре (зато смо наперили осу x према доле) а као ординату средњу дневну температуру то нам права ML претставља зависност средњих дневних температура са дубином у једном одређеном дану године. Абсциса тачке L је дебљина h слоја изложеног осцилацијама температуре, а њена је ордината константна температура u_0 у дубини h.



За време једнога уоченога дана осцилирају температуре око њихових средњих вредности претстављених правом ML. Амплитуда тих дневних осцилација је:

$$\pm n e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

она, дакле, опада са дубином. На горњој је површини њена вредност

$$n$$

а у дубини h је тако малена да је занемарива. Криве S_1L и S_2L, којих је одстојање у правцу осе Y од праве ML дато изразима:

$$+ n e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

$$- n e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

и које пролазе веома близу поред тачке L претстављају нам границе између којих температура у току уоченога дана варира. У току године осцилира тачка M између тачака M_u и M_0, које одговарају средњим дневним температурама најхладнијег односно најтоплијега дана. Тачка L не мења свој положај.

Досадањи резултати омогућују нам да при израчунавању соларне климе узмемо у обзир и утицај спровађања топлоте у унутрашњост земље и обратно. Соларна клима је, према пређашњем, ефекат инсолације, радијације и кондукције. Услед та три узрока довађају се на јединицу површине земље у малом интервалу времена Δt позитивне или негативне топлотне множине

$$\Delta q_1, \ \Delta q_2 \ \text{и} \ \Delta q_3$$

па ће се на површини указати у томе интервалу она температура за коју је алгебарски збир тих топлотних множина раван нули, јер кад то неби био случај онда би, ако је тај збир позитиван, температура површине одмах порасла, а опала ако је негативан све дотле док тај збир не исчезне.

Зато ће се температура површине израчунати из једначине:

$$\Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3 = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 18)$$

Као време Δt узимамо — по примеру Trabert-овом време τ, т. ј. време од 24^h. Средње дневне температуре израчунавамо, дакле, из топлотних множина што се у току једнога дана довађају на земљину површину.

Величине Δq_1, Δq_2, Δq_3 ваља одредити као функције времена и температуре површине земље на уоченом месту.

Величина Δq_1 је она множина топлоте која се услед инсолације довађа на јединицу површину земље у времену τ. У јединици времена довађа се, према пређашњем, топлотна множина:

$$\frac{dq_1}{dt} = AJ \cos z \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 19)$$

Употребив једначину 7) добивамо:

$$dq_1 = AJ \left\{ \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos \frac{2\pi}{\tau} t \right\} dt \quad 20)$$

па је:

$$\Delta q_1 = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} dq_1 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 21)$$

При примени једначине 20) у једначини 21) ваља имати на уму да се инсолација врши само за време док се сунце налази над хоризонтом, т. ј. док је:

$$z \leqq \frac{\pi}{2}$$

дакле од изласка до заласка сунчевог. Означимо ли трајање дневнога лука сунчевог, дакле дужину дана, са θ, то је време сунчевог изласка $\frac{\theta}{2}$, а време заласка $+\frac{\theta}{2}$, зато је:

$$\Delta q_1 = \int_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} dq_1 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 21^*)$$

Величина θ се израчунава из једначине 7) ако се у њој стави $t = \frac{\theta}{2}$, $z = \frac{\pi}{2}$. На тај начин добивамо:

$$sin\,\varphi\,sin\,\delta + cos\,\varphi\,cos\,\delta\,cos\,\frac{\pi}{\tau}\,\theta = 0$$

одакле се може одредити величина θ:

$$cos\,\frac{\pi}{\tau}\theta = -\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\delta = -\operatorname{tang}\psi(t)\operatorname{tang}\varphi \cdot 22)$$

Из једначина 20) и 21*) следује:

$$\Delta q_1 = AJ\int\limits_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}}\left(sin\,\varphi\,sin\,\delta + cos\,\varphi\,cos\,\delta\,cos\,\frac{2\pi}{\tau}\,t\right)dt \cdot 23)$$

Величина φ је на посматраноме месту константна, а у времену θ можемо и деклинацију δ сматрати константном, зато је:

$$\Delta q_1 = AJ\left\{\theta\,sin\,\varphi\,sin\,\delta + cos\,\varphi\,cos\,\delta\int\limits_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}}cos\,\frac{2\pi}{\tau}\,t\,dt\right\}$$

т. ј.

$$\Delta q_1 = AJ\left\{\theta\,sin\,\varphi\,sin\,\delta + \frac{\tau}{\pi}\,cos\,\varphi\,cos\,\delta\,sin\,\frac{\pi}{\tau}\theta\right\} \cdot 24)$$

Величина Δq_1 изражена је, дакле, као функција деклинације δ и дужине дана θ, а обе ове величине су функције времена, односно датума дана за који одређујемо величину Δq_1.

Величине δ, θ, φ налазе се директно у сваком астрономском календару, J је, према најновијим испитивањима[1]), једнако 2 грам-калорије ако се за јединицу времена узме минута, а за јединицу површине cm^2, A зависи од природе посматранога дела површиче.

Величина Δq_2 је она множина топлоте која се у току од 24^h радијацијом доведе на земљину површину, па како земаљска површина без престанка губи радијацијом топлотне множине, то је Δq_2 негативно.

Према пређашњем довађа се у јединици времена на јединицу површине топлотна множина:

$$-\sigma A \cdot T^4$$

где је T абсолутна температура површине. При израчунавању топлотне множине која се у времену $\tau = 24^h$ довађа на земљину површину узећемо — по примеру Trabert-овом — средњу дневну температуру u_τ (у Celsius-овим степенима) у обзир, па је зато:

$$\Delta q_2 = -\sigma A (273 + u_\tau)^4\,\tau \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; 25)$$

коефицијенат σ изнаша по новијим испитивањима[2]) 0·768.10^{-10} грам-калорија ако се за јединицу времена узме минута а за јединицу површине cm^2.[3])

---

[1]) Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik, Leipzig 1911. стр. 444. За израчунавање величине Δq_1 могу се употребити и Angot-ове таблице, публиковане у: Annales du Bureau Central météor. de France. 1883.

[2]) Kurlbaum, Ueber eine Methode zur Bestimmung der Strahlung in absolutem Masse. Ann. d. Phys. u. Chem., 65, p. 746 (1898).

[3]) Paschen, Ueber die Gesamtemission glühenden Platins, Wied. Ann., 49 p. 50—68 (1893). и Ueber Gesetzmässigkeiten in den Spektren fester Körper, Wied. Ann., 58, p. 455—492 (1896) и 60, p. 662—723 (1897) долази до закључка да је закон радијације за потпуно црна тела боље по Stefan-овим законом формулисан једначином:

$$\frac{dq_2}{dt} = c\,T^\epsilon$$

где су c и ϵ константе које зависе од природе површине тела. Siegl, Ueber das Emissionsvermögen von Gesteinen, Wasser und Eis. Wiener Sitzungsbe-

Величина $\varDelta q_3$ је она множина топлоте која се у току времена τ довађа кондукцијом на јединицу површине земље. Према Fourier-овој теорији довађа се у јединици времена на јединицу површине топлотна множина:

$$\frac{dq_3}{dt} = k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=0},$$

где је k коефицијенат спроводљивости температуре. И у овом случају сматрамо температуру површине у току једнога дана константну и једнаку средњој дневној температури u_τ тога дана.

Зато је:

$$\frac{dq_3}{dt} = k \left.\frac{\partial u_\tau}{\partial x}\right\}_{x=o} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 26)$$

но како је, обзиром на једначину 17)

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial x} = \frac{u_0 - m}{h},$$

где m значи средњу дневну температуру површине то је:

$$\left.\frac{\partial u_\tau}{\partial x}\right\}_{x=o} = \frac{u_0 - u_\tau}{h}$$

па зато је

$$\frac{dq_3}{dt} = k \frac{u_0 - u_\tau}{h} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 26')$$

множина топлоте која се у јединици времена довађа на површину. У времену τ довађа се множина

$$\varDelta q_3 = \frac{k}{h}(u_0 - u_\tau)\,\tau \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 27)$$

Ставимо ли вредности за $\varDelta q_1$, $\varDelta q_2$ и $\varDelta q_3$ из једначина 24), 25 и 27) у једначину 18), то добивамо:

$$AJ \Big\} \theta \sin\varphi \sin\delta + \frac{\tau}{\pi} \cos\varphi \cos\delta \sin\frac{\pi}{\tau}\,\theta \Big\} -$$

$$- \sigma A\,(273 + u_\tau)^4\,\tau + \frac{k}{h}(u_0 - u_\tau)\,\tau = o \quad \cdot \cdot \quad 28)$$

Означимо ли

$$\frac{\theta}{\tau} = \lambda \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 29),$$

где, дакле, λ означава однос дужине уоченога дана према интервалу од 24^h, то горња једначина добива овај облик:

$$\sigma A\,(273 + u_\tau)^4 + \frac{k}{h}(u_\tau - u_0) =$$

$$= AJ \Big\{ \lambda \sin\varphi \sin\delta + \frac{1}{\pi} \cos\varphi \cos\delta \sin(\lambda\pi) \Big\} \quad 30)$$

У горњој једначини претставља u_0, према пређашњем, средњу годишњу температуру површине, тј.

$$u_0 = \frac{1}{365} \sum_{1}^{365} u_\tau \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 31)$$

Та вредност није још позната, но неће бити тешко прво ју апроксимативно одредити па ју помоћу једначина 30) и 31) верификовати и коригирати. Иначе су у једначини, сем величине u_τ, познате све вредности, па нам зато једначина 30) служи за одредбу средње дневне температуре произвољнога дана године на произвољном месту земаљске површине и дозвољава, према томе, одредбу математске или соларне климе.

---

richte. Bd. CXVI. Abt. IIa Oktober 1907. одредио је те константе за тела која баш у нашем случају долазе у обзир. Из његове радње следује да се ε не разликује много од 4, а разноврсност од c може се избором константе A узети у обзир.

⁂

Примена теорије, што смо ју у овој расправи развили, на конкретне случајеве, посао је климатолога; он ће најбоље знати одабрати материјалне константе које се у једначини 30) појављују. Ми смо се зато у пређашњим излагањима кретали на пољу чисте теорије, но мислимо да неће бити сувишно да сада ту теорију применимо на један конкретан случај да би се и практична вредност њена јаче осетила.

Ми смо у почетку наше радње навели да је Trabert у својој цитираној расправи израчунао да би у месецу јуну владала на полу температура од + 82° C док би за време полугодишње ноћи та температура пала на — 273° C. Питајмо сада какове резултате пружа наша теорија и израчунајмо температуру најтоплијега и најхладнијега дана на полу.

Једначине, што смо их извели, дозвољавају нам да те температуре израчунамо само треба у њих метнути специјалне вредности величина које се у њима појављују. Те вредности одређене су на овај начин.

Величине σ и J имају, ако се рачуна у грамкалоријама, за јединицу дужине узме *cm* а за јединицу времена минута, према најновијим испитивањима ове вредности

$$\sigma = 0{\cdot}768 \times 10^{-10}$$
$$J = 2$$

Абсорбциони коефицијенат A израчунаћемо на овај начин:

Према напред цитираној радњи Siegl-овој дате су радијације воде и леда једначинама:

$$\frac{dq_2}{dt} = 0{\cdot}496 \times 10^{-12}\, T^{\varepsilon}$$
$$\frac{dq_2}{dt} = 0{\cdot}437 \times 10^{-12}\, T^{\varepsilon}$$

Експоненти ε не разликују се много од експонента 4 који би следовао по Stefan-овом закону, а средња вредност обају коефицијената горњих израза

$$0{\cdot}467 \times 10^{-12}$$

не разликује се много од одговарајућих коефицијената за хумус и за шкриљце. Зато можемо узети као средњу вредност:

$$\sigma A = 0{\cdot}467 \times 10^{-12}$$

и претпоставити да Stefan-ов закон вреди. Обзиром на пређашњу вредност коефицијента σ добивамо

$$A = 0{\cdot}36$$

За коефицијенат k може се узети — ако је јединица површине cm^2 а времена секунда — средња вредност $0{\cdot}005$,*) но како смо досад узели за јединицу времена минуту то је:

$$k = 0{\cdot}3$$

Величина h је, према пређашњем, 10 *m*, а како меримо дужине у *cm* то стављамо

$$h = 1000$$

Једначина 30) добива, дакле, овај облик:

$$0{\cdot}768 \times 10^{-10} \times 0{\cdot}36\,(273 + u_\tau)^4 + \frac{0{\cdot}3}{1000}\,(u_\tau - u_0) =$$
$$= 0{\cdot}36 \times 2 \left\{ \lambda \sin\varphi \sin\delta + \frac{1}{\pi} \cos\varphi \cos\delta \sin(\lambda\pi) \right\}$$

За температуру u_0 узимамо вредност

$$u_0 = -65^\circ$$

---

*) Овај податак дао нам је г. Д-р П. Вујевић, стални доцент Универзитета за климатологију и метеорологију.

па ћемо касније показати да је ова температура веома блиска средњој годишњој температури, а како је на полу $\varphi = 90^0$ то горња једначина добива овај облик:

$$0{\cdot}768 \times 10^{-10} \times 0{\cdot}36\,(273 + u_\tau)^4 + 0{\cdot}000\,3\,(u_\tau + 65) - \\ - 0{\cdot}72\,\lambda \sin\delta = 0$$

Сваком дану године одговара једно одређено λ и δ па се из горње једначине може одредити средња температура свакога произвољнога дана године. Ми ћемо ју применити за одредбу средњих дневних температура 21. јуна (п. р.) и 21. децембра (п. р.).

21. јуна достизава сунце своју највећу деклинацију, тј. за тај је дан

$$\delta = 23^\circ 30'$$

а како тога дана сунце не залази то је

$$\lambda = 1$$

па горња једначина добива овај облик:

$$0{\cdot}768 \times 10^{-10} \times 0{\cdot}36\,(273 + u_\tau)^4 + 0{\cdot}000\,3\,(u_\tau + 65) - \\ - 0{\cdot}72 \sin 23^\circ 30' = 0$$

Ова једначина има корен:

$$n_\tau = + 38^\circ\ C$$

21. децембра сунце се не појављује изнад хоризонта зато је

$$\lambda = 0$$

а средња температура тога дана израчунава се из једначине:

$$0{\cdot}768 \times 10^{-10} \times 0\,36\,(273 + u_\tau)^4 + 0{\cdot}0003\,(u_\tau + 65) = 0$$

Ова једначина има корен:

$$u_\tau = - 118^\circ\ C$$

Средњу годишњу температуру израчунаћемо довољно тачно на овај начин: Како се сунце на полу не диже изнад хоризонта од 23. IX. до 21. III. то је за тај интервал непрестано $\lambda = 0$ па зато влада у томе интервалу температура од — 118° или у абсолутној мери од + 115°. 21. III. почиње температура да расте достижући 21. VI. свој максимум од 38° C или у абсолутној мери од *311°* да до 23. IX. опет падне на абсолутну температуру од + 155°. Претставимо ли мењање средњих дневних температура диаграмом то ће тај диаграм бити састављен из два дела: за интервал од 23. IX. до 21. III. биће диаграм права паралелна абсцисној оси са ординатом од + 155°; за интервал од 21. III. до 23. IX. имаће диаграм облик једне симетричне према абсцисној оси конкавне криве са максималном ординатом од + 311° у средини интервала. Претпоставимо да је тај део диаграма парабола и узмимо абсцису дужину читавог диаграма, која одговара једној години, за јединицу абсцисе, то је средња годишња температура једнака површини тога диаграма т. ј.

$$155 + \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\Big(311 - 155\Big) = 207$$

Средња је годишња температура, према томе, у абсолутној мери 207° или 66° C, па се разликује само за 1° C од претпостављене температуре u_0. Зато би, према нашој теорији, средње дневне температуре најтоплијега и најхладнијега дана на полу биле

$$+\,38^\circ\,C \ \text{и} \ -\,118^\circ\,C$$

оне су знатно ближе фактичним температурама него Trabert-ове вредности

$$+\,82^\circ\,C \ \text{и} \ -\,273^\circ C$$

па показују јасно велики утицај кондукције који је овом радњом добио свој математски облик.