О кинематичној симетрији и њеној примени на квалитативна решења проблема динамике.

од
Д-Р МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА,
ванр. проф. универзитета.

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 26. јуна 1911.)

Кинематика се може сматрати за једну раширену геометрију у којој се, осим просторних елемената појављује још и време, па је за то могуће из појма геометријске симетрије едификовати појам кинематичне симетрије увађањем времена као новог елемента.

Ми ћемо у овој радњи да прецизирамо појам кинематичне симетрије, да испитамо све могуће случајеве такве симетрије, да проведемо класификацију тих случајева и да покажемо да се на тај начин добивени резултати могу употребити за квалитативна решења проблема динамике.

Да би смо избегли сваку нејасноћу, а оштрије обележили циљ ове радње, изложићемо шта разумевамо под квалитативним решењима у проблемима динамике и покушати да групишемо та квалитативна решења у најважније категорије. Ако је при проучавању проблема кретања n материјалних тачака — а на овај проблем даду се свести сви проблеми динамике — могуће координате тих тачака изразити као функције времена t, то онда таково решење називамо *потпуним решењем* динамичкога проблема, јер нам оно открива све особине проучаванога кретања. Но у великој множини динамичних проблема није могуће — према данашњем стању математике — добити потпуно решење, па је специјално у тим случајевима, у којима су обичне методе динамике неупотребљиве, важно одредити макар неке особине проучаваног кретања. Налажење таквих особина проучаванога кретања називамо *квалитативним решењем*, па према томе да ли се те особине односе на природу кретања, на његов стабилитет, на његове кинематичке границе просторне границе, на његове кинематичке границе или на геометријске особине путања разликујемо следеће главне категорије квалитативних решења у проблемима динамике.

1. По природи својој делимо кретања у сређена и несређена. Ако посматрани систем тачака после интервала времена T сачињава исту такву констелацију (т. ј. међусобни релативни положај тачака) као и у почетку тога интервала, онда називамо кретање периодичним, а T периодом. Ако се при томе исте констелације дешавају на истом месту простора, онда називамо кретање апсолутно периодично, а иначе релативно периодично. Приближује ли се посматрани систем бесконачно једној одређеној констелацији, а да ју у коначном интервалу времена не заузме, и онда називамо кретање асимптотским кретањем. И овде можемо разликовати апсолутно и релативно асимптотско кретање. Периодична и асимптотска кретања зовемо одређенима, а остала неодређенима. Одредити, према томе, природу проучаванога кретања, значи одредити којој од наведених класа припада проучавано кретање, па таква одредба представља једно квалитативно решење. Одредба периоде T код периодичног кретања може се сматрати као специјално квалитативно решење, јер нам оно даје констелацију за време $t = t_0 + nT$ где је t_0 иницијалан моменат, а n произвољан цео број. Исто је тако одредба асимптотног положаја специјално квантитативно решење које одговара вредности независне варијабилне $t = \infty$. У многим ће случајевима квалитативна решења омогућити налажење оваквих специјалних квантитативних решења.

2. Ако је при једном одређеном кретању једнога система материјалних тачака могуће једним бесконачно маленим импулсом на једној од тих тачака изазвати таково кретање, које се коначно разликује од првога, онда ово прво кретање зовемо нестабилним. У многим случајевима могуће је без познавања потпуног решења проучаванога кретања одредити да ли је оно нестабилно у горњем смислу, па та одредба представља једну нову категорију квалитативних решења.

3. Често пута је могуће одредити границу између којих варирају дистанције посматраних материријалних тачака; ако те дистанције, које сматрамо за позитивне, остају увек коначне т. ј. ако ниједна од њих не постане нити равна нули нити бесконачно велика, онда не долази никад до сукоба двеју тачака нити се иједна бесконачно удаљује од осталих, па зато велимо да је посматрани систем стабилан у најширем смислу речи. Одређивање тих граница, између којих дистанције посматраних тачака варирају, представља једну нову категорију квалитативних решења, па ће у извесним случајевима бити могуће ограничити онај део простора у којем се посматране тачке крећу а не остављају га. У случају асимптотскога кретања указује се кадшто и могућност да се одреде оне површине којима се посматране материјалне тачке асимптотски приближују. Ову категорију квалитативних решења можемо обележити као одређивање граница просторних елемената кретања.

4. Аналого прећашњем случају обухватаће следећа категорија квалитативних решења одређивање граница кинематичних елемената кретања т. ј. брзина и акцелерација. Ако је доња граница акцелерације једне посматране материјалне тачке позитивна или равна нули, онда је кретање тачке увек убрзано, ако је горња граница акцелерације негативна или равна нули, увек успорено.

5. Путање посматраних тачака су често геометријски облици (Gebilde), па ће сва квалитативна решења геометријске природе, која се односе на те путање, бити уједно и квалитативна решења динамичког проблема. Геометријске релације о таковим елементима путања посматраних тачака, кроз које оне у исти мах пролазе, дакле геометријске релације о истовременим тангентама путања или — што излази на исто — о моментаним правцима кретања, о моментанима радиусима кривине, о моментаним положајима оскулационих равнина итд. представљају — и ако је из њих време елиминисано — квалитативна решења кинематске природе, па нас могу у извеснима случајевима упознати са интимном природом проучаванога кретања.

Ово су главне категорије квалитативних решења у проблемима динамике.

Кинематична симетрија. — Уочимо, сада, путању једне мобилне тачке, која се креће у једној равни; одаберимо на тој путањи једну непомичну тачку M_0,

па означимо одстојање произвољне тачке M те путање од тачке M_0, мерено по луку путање, са s, где s може бити позитивно или негативно према томе на којој страни од M_0 лежи посматрана тачка M, то ће геометријски облик путање бити одређен ако нам њен радиус кривине ϱ буде познат као функција од s. Зато зовемо једначину:

$$\varrho = f_0(s) \qquad \ldots\ldots 1)$$

природном једначином путање, јер она одређује облик путање без координатног система.

Тачка M нека сада представља мобилну тачку, онда ће положај њен на путањи бити у свако доба одређен ако s буде познато као функција од t:

$$s = f_1(t) \qquad \ldots\ldots 2)$$

Једначине 1) и 2) одређују кретање мобилне тачке, при чему се не узима у обзир оријентација путање у њеној равнини; оне се могу заменити једначинама:

$$\left.\begin{aligned} s &= f_1(t) \\ \varrho &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 3)$$

које одређују облик путање ако се t сматра за параметар.

Означимо ли са m масу посматране мобилне тачке, а са P_t и P_ϱ тангенцијалну, односно центрипеталну компоненту силе P, која на ту тачку дејствује, то су динамичке једначине изражене са:

$$\left.\begin{aligned} P_t &= m\frac{d^2s}{dt^2} = m f_1''(t) \\ P_\varrho &= m\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\varrho} = m\frac{f_1'^2(t)}{f_2(t)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 4)$$

Помоћу једначина 3) и 4) могу се из познатога кретања извести силе које га изазивају и обратно.

Кретање посматране тачке назваћемо *кинематички симетрично*, ако је могуће одабрати једну нумеричну вредност t_0 тако да су у исти мах задовољене обе једначине:

$$\left.\begin{aligned} f_1^{\,2}(t_0-\tau) &= f_1^{\,2}(t_0+\tau) \\ f_2^{\,2}(t_0-\tau) &= f_2^{\,2}(t_0+\tau) \end{aligned}\right\} \;\cdots\cdots\; 5)$$

за сваку вредност од τ.

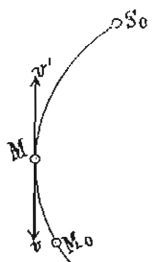
Према томе какове знакове дајемо другим коренима обеју страна горњих једначина имамо четири разна случаја кинематичне симетрије, па ћемо их испитивати сваки за себе:

1. Са вредности t_0 задовољене су идентично ове две једначине:

$$\left.\begin{aligned} f_1(t_0-\tau) &= f_1(t_0+\tau) \\ f_2(t_0-\tau) &= f_2(t_0+\tau) \end{aligned}\right\} \;\cdots\cdots\; 6)$$

онда се у лучном одстојању

$$s_0 = f_1(t_0)$$



Сл. 1.

од тачке M_0 налази на путањи тачка S_0 која има ове особине: брзина мобилне тачке:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

има у положају S_0 нумеричку вредност $f'(t_0)$. Из једначине 6) следује:

$$f_1'(t_0-\tau) = -f_1'(t_0+\tau) \;\cdots\cdots\; 7)$$

па ако у овој једначини ставимо $\tau = 0$, то добивамо

$$f_1'(t_0) = 0 \qquad \cdots\cdots\; 8),$$

што значи да је брзина мобилне тачке у положају S_0 једнака нули.

Из једначина 6) следује да су лучна одстојања мобилне тачке од тачке M_0, која одговарају моментима $(t_0-\tau)$ и $(t_0+\tau)$ а и радиуси кривине путањине који одговарају тим моментима исти, па како то важи за свако τ, то се мобилна тачка, пошто је достигла положај S_0, у којем јој је брзина равна нули, враћа истом путањом којом је дошла у S_0 и треба за повратак из S_0 у произвољну тачку путање исто толико времена колико је требала да из те тачке дође у S_0. Из једначине 7) следује даље да је брзина при другом пролазу у произвољној тачки путање једнака брзини што ју је мобилна тачка имала при првом пролазу, но противнога је правца.

Овај случај назваћемо случајем *идентичне кинематичке симетрије*, а тачку S_0 амплитудним положајем или положајем симетрије таковога кретања. Таково је н. пр. кретање тела баченога вертикално у вис, ако се не узме у обзир отпор ваздуха, или кретање математскога клатна; у оба случаја је највиша тачка амплитудни положај кретања.

2. Са вредности t_0 задовољене су идентично ове две једначине:

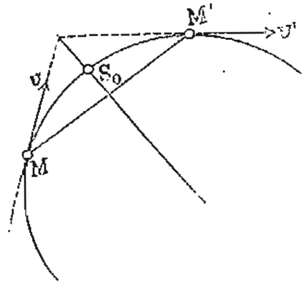
$$\left.\begin{aligned} f_1(t_0-\tau) &= -f_1(t_0+\tau) \\ f_2(t_0-\tau) &= f_2(t_0+\tau) \end{aligned}\right\} \;\cdots\cdots\; 9),$$

онда се у лучном одстојању:

$$s_0 = f_1(t_0)$$

од тачке M_0 налази на путањи тачка S_0 која има следеће особине:

Две тачке M и M' које имају исто лучно одстојање од тачке S_0, но противнога знака, тако да се налазе на различитим странама тачке S_0, имају исте радиусе кривине и конкавне су, због истих знакова тих радиуса, на исту страну. Путања је симетрична према нормали у тачки S_0.



Сл. 2.

Диференцирамо ли другу од једначина 9) по параметру τ, то добијамо:

$$f_2'\,(t_0 - \tau) = -\,f_2'\,(t_0 + \tau),$$

па ставимо ли у овој једначини $\tau = o$, то имамо

$$f'_2\,(t_0) = o \qquad 10)$$

или

$$\left.\frac{d\varrho}{d\tau}\right\}_{t_0} = o \qquad 10^*)$$

што казује, да радиус кривине достизава у тачки S_0 своју екстремну вредност.

Из прве једначине 9) следује, да мобилна тачка треба исто толико времена да из M дође у S_0 колико из S_0 у симетрични положај M', а диференцијацијом те једначине добивамо једначину:

$$f_1'\,(t_0 - \tau) = f_1'\,(t_0 + \tau) \qquad 11)$$

која казује да су брзине у тачкама M и M' једнаке. Поновна диференцијација даје:

$$f_1''\,(t_0 - \tau) = -\,f_1''\,(t_0 + \tau)$$

па ставимо ли у овој једначини $\tau = o$, то добивамо:

$$f_1''\,(t_0) = o \qquad 12)$$

На исти се начин може доказати да у тачки S_0 ишчезавају сви парни диференцијални квоцијенти функције f_1, а непарни функције f_2. Једначину 12) можемо писати и у облику:

$$\left.\frac{dv}{d\tau}\right\}_{t_0} = o \qquad 12^*)$$

што казује да брзина мобилне тачке достизава у положају S_0 своју екстремну вредност. Из једначина 4) следује да је у томе положају тангенцијална компонента силе P, која утиче на мобилну тачку, равна нули, па је у томе положају та сила нормална на путању.

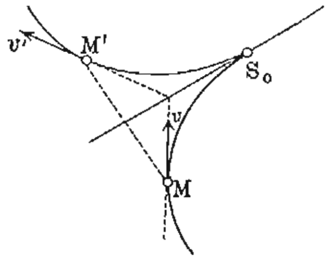
Овај случај, у којем је путања мобилне тачке симетрична према нормали тачке S_0 називаћемо покраћено случајем *нормалне кинематичне симетрије*, а тачку S_0 положајем симетрије таковога кретања. Таково је н. пр. кретање тела баченога косо у вис; највиша тачка путање је положај симетрије.

3°. Са вредности t_0 задовољене су идентично ове две једначине:

$$\left.\begin{aligned} f_1\,(t_0 - \tau) &= f_1\,(t_0 + \tau) \\ f_2\,(t_0 - \tau) &= -\,f_2\,(t_0 + \tau) \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;. \quad 13)$$

знак минус у другој једначини значи, да је путања у две кореспондирајуће тачке конкавна на две противне стране.

Лагано је увидети да је у овом случају путања симетрична према тангенти у тачки S_0, која се налази у лучном одстојању:



Сл. 3.

$$s_0 = f_1\,(t_0)$$

од тачке M_0.

Диференцијацијом прве једначине 13) добивамо:

$$f_1'\,(t_0 - \tau) = - f_1'\,(t_0 + \tau) \qquad 14),$$

што казује да симетричним тачкама одговарају исте брзине но противнога знака. Ставимо ли у горњој једначини $\tau = o$, то добивамо

$$f_1'\,(t_0) = o \qquad 15)$$

т. ј. брзина у тачки S_0 равна је нули. Овај случај назваћемо покраћено случајем *тангенцијалне кинематичне симетрије*, а тачку S_0 положајем симетрије таковога кретања.

4°. Са вредности t_0 задовољене су идентично ове две једначине:

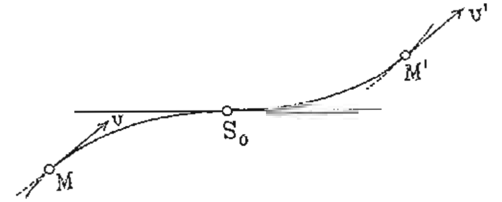
$$\left.\begin{aligned} f_1\,(t_0 - \tau) &= - f_1\,(t_0 + \tau) \\ f_2\,(t_0 - \tau) &= - f_2\,(t_0 + \tau) \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\; 16)$$

Онда је путања централно симетрична према тачки S_0 која се налази у лучном одстојању:

$$s_0 = f_1\,(t_0)$$

од тачке M_0.

У тачки S_0 мења радиус кривине путањине свој знак, зато мора у тој тачки и центрипетална сила P_ρ мењати свој знак. Предпоставимо ли да се сила P, која утиче на мобилну тачку, мења континуирно, онда мора њена компонента P_ρ у положају S_0 бити равна нули, јер мења на томе месту свој знак. Ако је брзина мобилне тачке у положају S_0 коначна, онда мора, због једначина 4), радиус кривине путање у тачки S_0 бити бесконачно велики: тачка S_0 је инфлексионална тачка.



Сл. 4.

Диференцијацијом прве од једначина 9) добивамо:

$$f_1'\,(t_0 - \tau) = f_1'\,(t_0 + \tau) \qquad 17),$$

што казује да симетричним положајима одговарају исте брзине. Поновна диференцијација даје:

$$f_1''\,(t_0 - \tau) = - f_1''\,(t_0 + \tau),$$

па ставимо ли у овој једначини $\tau = o$, то добивамо

$$f_1''\,(t_0) = o \qquad 18)$$

зато — исто као и у случају 2° — достизава брзина мобилне тачке у положају S_0 своју екстремну вредност, а тангенцијална компонента силе P ишчезава. Како је у овоме случају и центрипетална компонента силе P у тачки S_0 равна нули, то је тачка S_0 положај лабилне равнотеже мобилне тачке.

Овај случај назваћемо покраћено случај *инфлексионалне кинематичне симетрије*, а инфлексионалну тачку S_0 положајем симетрије таковога кретања. Овај случај може настати н. пр. при кретању мобилне тачке привлачене од два једнако јака атракциона центра, када мобилна тачка прође кроз положај своје лабилне равнотеже, т. ј. тачку која се налази у средини између оба атракциона центра.

Даљих случајева кинематичне симетрије нема, ако се предпостави да се мобилна тачка креће под утицајем силе која се континуирно мења. Јер када би путања била симетрична према једној правој, која није ни тангента ни нормала у тачки симетрије S_0, онда би путања имала у тој тачки један угао, а то значи да би мобилна тачка пролазећи кроз тај положај морала бити изложена једној моментаној сили, но тај је случај искључен горњим предпоставкама.

Положаји симетрије стоје у уској вези са *кинетичном енергијом* или живом силом мобилне тачке

$$L = \frac{mv^2}{2}$$

као што из следећега следује.

Диференцијацијом прве од једначина 5) следује:

$$f_1(t_0 - \tau)\, f_1'(t_0 - \tau) = -f_1(t_0 + \tau)\, f_1'(t_0 + \tau).$$

Квадрирамо ли ову једначину и узмемо ли опет у обзир једначине 5), то добивамо:

$$f_1'^2(t_0 - \tau) = f_1'^2(t_0 + \tau),$$

а поновном диференцијацијом

$$f_1'(t_0 - \tau)\, f_1''(t_0 - \tau) = -f_1'(t_0 + \tau)\, f_1''(t_0 + \tau).$$

Ставимо ли у горњој једначини $\tau = o$, то добивамо

$$f_1'(t_0) \cdot f_1''(t_0) = o,$$

која једначина казује да је у положајима симетрије или:

$$f_1'(t_0) = o$$

или:

$$f_1''(t_0) = o$$

Са првима изводом ишчезавају и сви непарни, а са другим и сви парни изводи функције f_1 у положају симетрије. Горње једначине казују такође да је у положајима симетрије или брзина мобилне тачке једнака нули или њена акцелерација, што, у осталом, следује синтетички и из пређашњих испитивања, где су сва четири случаја кинеметичне симетрије испитивана сваки за себе.

Кинетична енергија мобилне тачке достизава своје екстремне вредности када је

$$\frac{dL}{dt} = o$$

т. ј.

$$mv\frac{dv}{dt} = o$$

дакле или $v = o$ или $\frac{dv}{dt} = o$, т. ј. када је такође или брзина мобилне тачке или њена акцелерација равна нули. Зато можемо да кажемо:

Кинетична енергија мобилне тачке достизава у положајима кинематичне симетрије своје екстремне вредности.

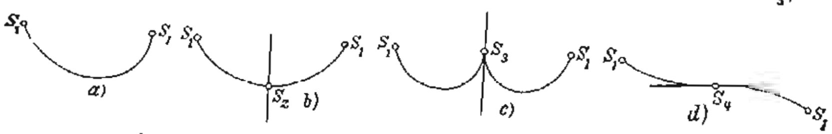
Пролази ли мобилна кроз најмање *два положаја кинематичне симетрије*, онда њено кретање добива — као што ћемо видети — периодичан карактер. Особине таковога кретања зависе од тога којима случајевима кинематичне симетрије припадају та два положаја, па је број свих могућих комбинација двају и двају од позната четири случаја — при чему се сваки случај може комбиновати са самим собом — једнак $\frac{1}{2}\ 5 \times 4 = 10$.

Тих десет случајева *периодичних и симетричних кретања* можемо груписати у три категорије које ћемо назвати осцилациона, циркулациона и ундулациона кретања и која ћемо испитати свако за себе.

Осцилациона кретања мобилне тачке су она за која се може доказати да мобилна тачка пролази кроз два положаја идентичне кинематичне симетрије или барем кроз један положај идентичне кинематичне симетрије и још барем један положај симетрије друге врсте.

На тај начин могу настати следеће четири врсте осцилационих кретања, којих су путање и положаји симетрије у слици 5. шематски представљене.

У тој слици су положаји идентичне симетрије означени са S_1, нормалне са S_2, тангенцијалне са S_3,



Сл. 5.

а инфлексионалне са S_4. Та означења употребићемо и у следећим сликама.

Тачке S_2, S_3, S_4 проузрокују да у свима случајевима имамо по два положаја идентичне кинематичне симетрије. Нека обе те тачке S_1 у сваком од горњих случајева одговарају параметрима t_0 и t_1. Онда је према једначинама 6):

$$f_1\,(t_0 - \tau) = f_1\,(t_0 + \tau), \qquad f_1\,(t_1 - \tau) = f_1\,(t_1 + \tau)$$
$$f_2\,(t_0 - \tau) = f_2\,(t_0 + \tau), \qquad f_2\,(t_1 - \tau) = f_2\,(t_1 + \tau)$$

ове једначине важе за свако τ. Ставимо ли у две леве од горњих једначина

$$\tau = t_0 - t,$$

а у две десне

$$\tau = t_1 - 2t_0 + t,$$

то добивамо једначине

$$f_1\,(t) = f_1\,(2t_0 - t) \qquad f_1\,(2t_0 - t) = f_1\,[t + 2\,(t_1 - t_0)]$$
$$f_2\,(t) = f_2\,(2t_0 - t) \qquad f_2\,(2t_0 - t) = f_2\,[t + 2\,(t_1 - t_0)]$$

или ако ставимо

$$2\,(t_1 - t_0) = T \quad \ldots\ldots\ 19)$$

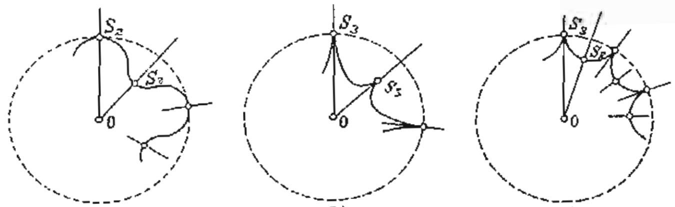
$$\left.\begin{aligned} f_1\,(t) &= f_1\,(t + T) \\ f_2\,(t) &= f_2\,(t + T) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 20)$$

Ове једначине казују да је кретање мобилне тачке периодично, а периода му је T. Мобилна тачка осцилира по својој путањи; интервалим времена T одговарају сасвим иста кретања. Кретање математскога клатна по равним кривама је репрезентанат ове врсте кретања.

Циркулациона кретања мобилне тачке су она за која се може доказати да мобилна тачка пролази кроз барем два положаја нормалне или два положаја тангенцијалне или кроз један положај нормалне и један положај тангенцијалне симетрије, а не пролази ни кроз положаје идентичне ни инфлексионалне симетрије.

На тај начин могу настати следеће три врсте циркулационих симетричних кретања којих су путање и положаји симетрије представљени шематски у слици 6.

Аналогно пређашњем случају може се доказати, а следује, у осталом, из слике, да су овакова кретања



a) b) c)

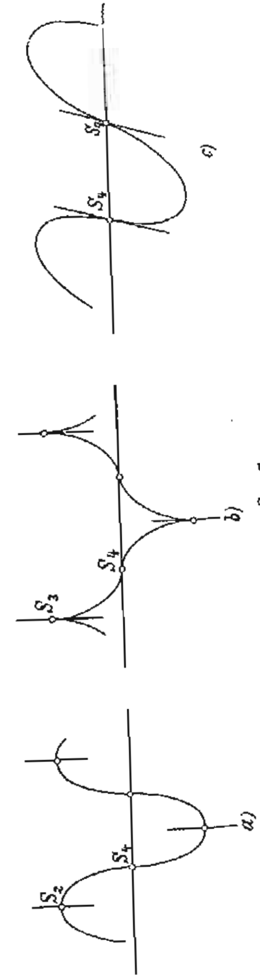
Сл. 6.

релативно периодична са периодом $T = 2\ (t_1 - t_0)$, где су t_0 и t_1 параметри који одговарају двема консекутивним положајима симетрије. У интервалима T изваља мобилна тачка кинематска конгруентна кретања, крећући се у кружној површини које центрум лежи у O, пресеку оса кинематичних симетрија. Затварају ли осе симетрије двају консекутивних положаја симетрије један угао, који је аликвотни део пунога угла, онда је путања мобилне тачке затворена.

На кретање ове врсте наилази се често пута у небеској механици, Кеплерова елипса је репрезентант случаја *a)* а случај *c)* појављује се у астероидном проблему; Hill-ов сателит „of the last lunation“ изваља таково кретање. И кретање кружног математског клатна, које смо навели као пример за осцилационо кретање, може бити циркулационо. Ако је иницијална брзина клатна такова, да оно не достигне највишу тачку круга, у којем се креће, онда је његова амплитудна тачка положај идентичне кинематичке симетрије; у случају да је иницијална брзина такова да клатно таман достизава највишу тачку

круга, онда бесконачно малени прираст брзине мења осцилациони карактер кретања у циркулациони.

Ундулациона кретања мобилне тачке су она, за која се може доказати да мобилна тачка пролази кроз најмање два положаја кинематичне симетрије од којих је барем један инфлексионалан, а други није положај идентичне кинематичне симетрије.



Сл. 7.

На тај начин могу настати следеће три врсте ундулационих симетричних кретања којих су путање и положајима симетрије представљене шематски у сл. 7.

Аналогно пређашњем може се доказати, а следује, у осталом директно из слике, да су и оваква кретања релативно периодична са периодом $T = 2\ (t_1 - t_0)$ где t_0 и t_1 одговарају двема консекутивним положајима симетрије. У интервалима T изваља мобилна тачка кинематска конгруентна кретања; сви положаји инфлексионалне симетрије леже у истој правој, путања мобилне тачке има таласаст облик.

Овакова кретања могу настати састављањем осцилационога кретања са транслаторним.

Досадање резултате можемо рекапитулирати овако: *може ли се доказати да мобилна тачка про-*

лази кроз два разна положаја кинематичне симетрије, то ће њено кретање имати периодичан карактер; мобилна тачка изваћаће у интервалима $T = 2\,(t_1 - t_0)$, где су t_0 и t_1 параметри двају консекутивних положаја симетрије, кинематички конгруентна кретања. Кроз више од два разноврсна положаја симетрије не може мобилна тачка пролазити; такова два положаја алтернирају један за другим.

Резултати, што смо их до сада извели, могу се употребити за конструкцију неких категорија периодичних кретања и — што је важније — на испитивање да ли посматрани систем има такових периодичких кретања. Такова одредба спада, као што смо у уводу навели, у квалитативна решења динамике, па је од особитог значаја за проблеме небеске механике.

Појам кинематичне симетрије употребићемо, пре свега, на испитивање периодичних кретања у случајевима када силе које утичу на мобилну тачку деривирају од потенцијала чије је поље симетрично према једном сталном центру или једној оси. Посматраћемо само кретања мобилне тачке у једној равни, па ћемо затим показати како се добивени резултати могу употребити и за друге неке случајеве.

Периодична кретања мобилне тачке у потенцијалном пољу, које је централно симетрично према једном сталном центру. Нека силе, које утичу на мобилну тачку, потичу од потенцијала U_1 или функције сила $U = -U_1$, па нека је то поље централно симетрично према центру O, т. ј. нека еквипотенцијалне површине буду концентричне кугле са центром у O. Онда можемо ставити

$$U = U(r) \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

где је r одстојање мобилне тачке од центра O.

Резултанта P сила, које утичу на мобилну тачку M, једнака је:

$$P = \frac{dU}{dr} \quad \ldots\ldots \quad 22),$$

стоји нормално на еквипотенцијалној површини, т. ј. пролази увек кроз центар O, а функција је одстојања r. Овај је случај дакле идентичан са случајем централних сила t, када је сила функција одстојања мобилне тачке од центра сила. Зато ће се мобилна тачка кретати у равни која пролази кроз O и кроз њену иницијалну брзину. Фиксирамо ли у тој равнини једну поларну осу, која пролази кроз O, па означимо ли угао, што га радиусвектор r са том осом затвара са φ, то је према познатој једначини површина:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C \quad \ldots \quad 23),$$

где C означава константу површина.

Теорема живе силе даје једначину:

$$\frac{mv^2}{2} = U(r) + h \quad \ldots\ldots \quad 24)$$

где v означава брзину мобилне тачке а h константу живе силе. Како је:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \quad \ldots\ldots \quad 25),$$

то из горњих једначина следује:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\,U(r) - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2}{m}\,h \quad \ldots\ldots \quad 26)$$

Интеграција ове једначине, која се ограничава на квадратуре, даје једначину кретања мобилне тачке по радиусвектору r:

$$r = \Phi(t) \qquad \cdots\cdots 27)$$

Геометријску представу ове једначине у ортогоналном координатном систему, где осу абсциса узимамо за осу t, а осу координата за осу r, назваћемо диаграмом радиусвектора.

Нека $r = r_0$ одговара једној екстремној вредности од r, т.ј. нека представља једну максималну или минималну ординату диаграма, онда је

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=r_0} = 0 \qquad \cdots\cdots 28)$$

а r_0 представља један реалан корен једначине

$$U(r) - \frac{m}{2}\frac{C^2}{r^2} + h = 0 \qquad \cdots\cdots 29),$$

разрешене по r. Тангента диаграма у тачки $r = r_0$ паралелна је оси t, а како, према једначини 26) једнаким ординатама лево и десно од те тачке одговарају и једнаки нагиби тангената диаграма према абсцисној оси, то ће диаграм бити симетричан према ординати тачке $r = r_0$.

Из једначина 23) и 26) следује:

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = \frac{C^2 m}{2r^2\,U(r) + 2hr^2 - C^2 m} \qquad \cdots\cdots 30),$$

а то значи да симетричним тачкама диаграма одговарају једнаке промене $\frac{d\varphi}{dr}$. Зато ће и путања мобилне тачке бити симетрична према радиусвектору

$r = r_0$, а како према једначинама 25) и 26) следује да симетричним положајима одговарају једнаке брзине, то ће кретање мобилне тачке бити кинематички симетрично обзиром на радиусвектор $r = r_0$.

Ако је константа површина

$$C = 0$$

онда се мобилна тачка креће у правој која пролази кроз O, а једначина 29) добива облик:

$$U(r) + h = 0.$$

Ако је $r = r_0$ један реални корен те једначине који одговара максималном или минималном одстојању мобилне тачке од центра O, онда је брзина мобилне тачке у положају $r = r_0$, према једначини 24), равна нули и она мења, достигувши тај положај симетрије, правац свога кретања и враћа се истим путем натраг. Зато такав положај одговара случају идентичне кинематичне симетрије.

Ако је константа површина

$$C \gtrless 0$$

онда је сваки максимални или минимални радиусвектор $r = r_0$ нормалан на путању, па су зато положаји мобилне тачке, који одговарају екстремним вредностима радиусвектора, положаји нормалне кинематичне симетрије.

Положаји мобилне тачке, који одговарају екстремним вредностима радиусвектора, су положаји идентичне или нормалне кинематичке симетрије према томе дали је $C = 0$ или $C \gtrless 0$. Довољни динамички критериум за први случај је да је $v = 0$, јер је тада eo ipso $C = O$, а за други случај да је вектор брзине нормалан на радиусвекор и да је у томе положају $P = \frac{dU}{dr} \gtrless O$, јер онда мора на томе месту путања бити или конвексна или конкавна према центру O, а не може имати инфлексионалну тачку.

Лева страна једначине 24) есенцијелно је позитивна, па због тога не може мобилна тачка изаћи из онога дела простора за који је $U(r) + h$ позитивно.

Сферна површина:

$$U(r) + h = O$$

гранична је површина тога простора па репрезентира — ако јој радиус није безконачно велик — квалитативно решење које смо назвали опредељењем просторних граница кретања. Из пређашњега следује да положаји идентичне симетрије леже на таковој пространој граници кретања.

Кретање мобилне тачке абсолутно је периодично са периодом T ако се она у времену $t + \tau$ налази на истом месту у којем се је налазила у времену t, т. ј. ако потпуно решење проблема:

$$x = f_1(t)$$

$$y = f_2(t)$$

$$z = f_3(t),$$

где x, y, z означавају координате мобилне тачке, задовољава условима:

$$f_1(t) = f_1(t + T)$$

$$f_2(t) = f_2(t + T)$$

$$f_3(t) = f_3(t + T).$$

Пролази ли мобилна тачка кроз два положаја кинематичне симетрије, од којих је барем један положај идентичне кинематиче симетрије, то ће она, према пређашњем, пролазити кроз још један положај идентичне кинематичне симетрије, а њено кретање имаће осцилаторан карактер па бити абсолутно периодично. Може ли се доказати да мобилна тачка пролази кроз два положаја нормалне кинематичне симетрије, тада ће њено кретање бити циркулационо и абсолутно периодично онда ако је угао, што га осе тих двеју положаја симетрије затварају, аликвотни део пунога угла.

Горњи закључци могу се и обрнути. Изваћа ли мобилна тачка аисолутно периодично кретање, онда оно мора бити или осцилационо, у коме случају путања има два положаја идентичне кинематичне симетрије, или је путања затворена равна крива; но свака затворена равна крива (ако није круг са центром у O) има барем једно минимално и једно максимално одстојање од центра O, дакле барем два положаја нормалне кинематичке симетрије.

У централно-симетричном потенцијалном пољу су сва периодична кретања мобилне тачке симетрична кретања. Мобилна тачка не може у таквоме пољу описати затворену асиметричну криву.

Ако је сила P, која утиче на мобилну тачку, континуирна, онда ће и путања мобилне тачке бити континуирана линија, она ће моћи имати крајњих тачака на местима где брзина мобилне тачке изчезава, дакле на просторним границама кретања, па ће те тачке бити положаји практичне кинематске симетрије и представљати минимална или максимална одстојања мобилне тачке од центра сила. Свака континуирана крива мора имати барем једно минимално или барем једно максимално одстојање од центра сила ако му ее асимптотски не приближује секући радиусвектор под углом који није једнак $\frac{\pi}{2}$; но свако максимално или минимално одстојање од центра представља положај симетрије, па зато можемо да кажемо:

Путања мобилне тачке која се креће под утицајем једне континуиране централне силе, мора бити или симетрична или се мора асимптонски приближавати центру сила.

Периодична кретања мобилне тачке у потенцијалном пољу које је аксијално симетрично. Мобилна тачка нека се креће у једној равни, а силе које на њу утичу нека деривирају од потенцијала $U_1 = -U$ који је симетрично поразмештан обзиром на осу Y. Нека дакле функција

$$U = U(x, y)$$

остаје при субституцији

$$x = -x$$

инваријантна т. ј. нека буде:

$$U(x_1 y) = U(-x_1 y) \quad \cdots\cdots \quad 31)$$

или

$$\frac{dU(x_1 y)}{dx} = -\frac{dU(-x_1 y)}{dx}$$

ставимо ли у горњој једначини:

$$x = O$$

то добивамо:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right\}_{x=O} = O \quad \cdots\cdots \quad 32)$$

т. ј. у тачкама осе Y изчезава компонентна X силе P која утиче на мобилну тачку. Ако сила P није равна нули, онда она пада у праву осе Y па еквипотенцијалне линије

$$U(x_1 y) = const$$

пресецају нормално осу Y и достизавају у њој своја екстремна одстојања од осе X.

Ако у којој тачки осе Y еквипотенцијалне линије не пресецају ову нормално него косо то се, због симетрије, секу у тој тачки две еквипотенцијалне линије или, боље рећи та је тачка двострука па има две нормале, како би сила P морала пасти и у једну и у другу од тих нормала то она изчезава: посматрана тачка осе Y је положај равнотеже мобилне тачке. Исто то важи и за она места осе Y где ју еквипотенцијалне линије тангирају.

Једначине кретања мобилне тачке:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt} &= \frac{dU}{dx} \\ m\frac{dy^2}{dt^2} &= \frac{dU}{dy} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad 33)$$

такође су инваријантне према субституцији

$$x = -x$$

па ће при одабраним иницијалним условима дозволити кинематички симетрична кретања мобилне тачке. Ти услови морају бити такове природе да мобилна тачка пресече нормално осу симетрије, јер онда прелази симетрично из једног дела поља у други симетрични део. Због тога ће јој путања бити симетрична, а према једначини живе силе

$$\frac{mv^2}{2} = U(x, y) + h \qquad \ldots \; 34)$$

која при субституцији $x = -x$ остаје инваријантна, одговараће симетричним тачкама путање исте брзине.

Иницијални услови који дозвољавају симетрична кретања су ови

$$\begin{cases} t = t_0 \\ x = o \quad y = b \quad \dfrac{dx}{dt} = v_1 \quad \dfrac{dy}{dt} = o \end{cases}$$

јер условљавају нормални прелаз мобилне тачке преко осе Y. Интеграли једначина кретања:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t, b, v_1) \\ y &= f_2(t, b, v_1) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \; 35)$$

садржаваће још две константе b и v_1 које се могу произвољно одредити. Одреде ли се ове тако да при једном од следећих пролаза мобилне тачке кроз осу Y њен правац брзине буде опет нормалан на ту осу, то ће тај пролаз представљати други положај нормалне кинематичне симетрије. Симетрале обају положаја поклапају се, па је кретање мобилне тачке абсолутно периодично.

Такова периодична кретања добивају се, дакле, на овај начин: константе b и v_1 одреде се тако да ако је t_1 један реални корен једначине:

$$f_1(t_1, b_1, v_1) = o \qquad 36),$$

при чему је

$$t_1 \gtreqless t_0,$$

буде

$$\left.\frac{dy}{dt}\right\}_{t = t_1} = o$$

т. ј.

$$f_2'(t_1, b, v_1) = o \qquad \ldots \; 37).$$

Скуп парова реалних корена b и v_1 једначина 36) и 37) даје сва периодична решења ове категорије. Периода је тих кретања

$$T = 2(t_1 - t_0)$$

Овај начин конструкције периодичких кретања предпоставља могућност интеграције једначина кретања. У случајевима, у којима та интеграција није могућа, поступа се овако: при одабраноме b и v_1 конструише се путања мобилне тачке помоћу механичке квадратуре, па се онда v_1 варира тако дуго док путања у једном од следећих пролаза не пресече нормално осу Y.

Поља овакве врсте настају н. пр. ако на мобилну тачку дејствују атракциона центра која леже у једној правој њене равнине кретања. Често пута испитивани случај, када је мобилна тачка привлачена од два стална центра по Newton-овом закону, спада у ову категорију.

Од веће је важности за проблеме небеске механике следећи случај:

Периодична кретања мобилне тачке у ротирајућем потенцијалном пољу, које је аксијално симетрично. Посматрано поље нека буде равно, аксијално симетрично према оси x, па нека ротира око једне осе која у једној тачки осе x нормално продире равнину поља, у којој се мобилна тачка креће. Вектор ротације нека буде $\mathfrak{w}$

$$\mathfrak{w} = n\,\mathfrak{a}_0 \qquad \ldots \; 38)$$

где је $\mathfrak{a}_0$ јединични вектор нормалан на равнину кретања, а наперен на ону страну њену, са које посматрано ротација следује у позитивном смислу т. ј. обратно сказаљки на сату. n је онда интензитет угловне брзине, па нека n буде константно; касније ћемо се упознати са случајевима где се n са временом мења.

Посматрамо ли сада релативно кретање мобилне тачке обзиром на осу x која са равнином ротира, то ју можемо, према теорији релативнога кретања, сматрати за непомичну ако на мобилној тачки осим силе $\mathfrak{P}$, изазване потенцијалним пољем U

$$\mathfrak{P} = \text{grad}\, U \qquad \ldots 39)$$

додамо још две фиктивне силе: центрифугалну и Coriolis-ову силу.

Одаберемо ли продирну тачку осе ротације са равнином кретања за почетну тачку ортогоналног кординатног система $X-Y$, па означимо ли вектор положаја мобилне тачке са $\mathfrak{r}$, а његов интензитет са r, то је центрифугална сила $\mathfrak{f}$ једнака

$$\mathfrak{F} = \frac{m\,(nr)^2}{r}\,\mathfrak{r}_0 = mn^2 r\,\mathfrak{r}_0 \qquad \ldots 40)$$

а Coriolis-ова сила $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{C} = -2m\,[\mathfrak{w}\mathfrak{v}] = 2mn\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0] \qquad \ldots 41)$$

где $\mathfrak{v}$ представља вектор релативне брзине мобилне тачке у ротирајућем систему.

Једначина кретања мобилне тачке биће, према томе

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \text{grad}\, U + mn^2 r\mathfrak{r}_0 + 2mn\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0] \quad 42)$$

како је

$$n^2 r\,\mathfrak{r}_0 = \text{grad}\,\frac{n^2}{2}\,r^2$$

то је

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \text{grad}\,\left(\frac{U}{m} + \frac{n^2}{2}\,r^2\right) + 2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0] \qquad 43)$$

Уведемо ли скаларну вредност V

$$V = \frac{U}{m} + \frac{n^2}{2}\,r^2 \qquad \ldots 44)$$

то једначина кретања добива овај једноставни облик

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \text{grad}\, V + 2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0] \qquad \ldots 45)$$

Помножимо ли ову једначину скаларно са

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt},$$

то добивамо

$$\mathfrak{v}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = (\mathfrak{v}\nabla)\,V \qquad \ldots 46)$$

Субстанцијелна промена скалара V на мобилној тачки је

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} + (\mathfrak{v}\nabla)\,V$$

но како је стационарна промена

$$\frac{dV}{dt} = 0,$$

то једначина 46) добива облик

$$\mathfrak{v}d\mathfrak{v} = dV$$

па њена интеграција даје

$$v^2 = 2V - C \qquad \ldots 47)$$

где v означава интензитет релативне брзине мобилне тачке. Како је v^2 есенцијелно позитивна величина, то мобилна тачка неће изаћи из онога дела равнине за који је $2V - C$ позитивно, па зато је

$$2V - C = o \qquad \ldots 48)$$

једначина граничне криве, па представља, ако је крива затворена, квалитативно решење проблема, које смо назвали определењем просторних граница кретања.

Потенцијал U је симетричан према оси X, дакле инваријантан при субституцији

$$y = -y$$

а како је

$$r^2 = x^2 + y^2$$

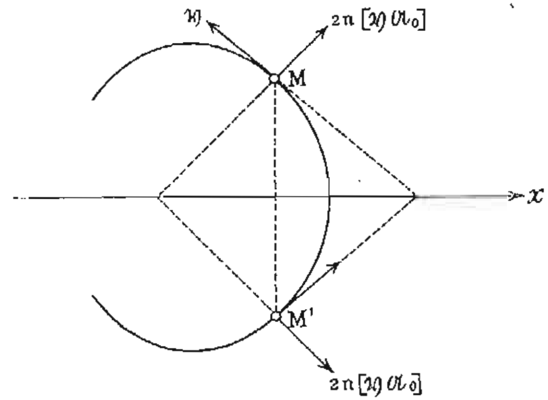
то ће и скалар V бити инваријантан при тој субституцији дакле такође симетричан према оси X.

Зато ће кретање мобилне тачке бити таково као када би јој маса била једнака јединици, а она се кретала у непомичном потенцијалном пољу V, које је симетрично према оси X, и кад би на њу, осим тога, дејствовала фиктивна сила $2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$. Ова фиктивна сила стоји нормално на вектору $\mathfrak{a}$ па лежи зато у равнини кретања.

Питајмо сада када ће у овоме случају мобилна тачка извађати кинематички симетрична кретања.

Када на мобилну тачку не би утицала сила $2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$ било би њено кретање кинематички симетрично увек онда када би њена путања нормално пресекла осу X.

Узмимо, дакле, да мобилна тачка изваћа таково кинематички симетрично кретање према оси X, па испитајмо да ли је таково кретање могуће под утицајем фиктивне силе $2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$. У двема симетричним тачкама M и M' такове кинематички симетричне путање биле



Сл. 8.

би брзине мобилне тачке једнаке, њихове праве симетричне према X, но не њихови правци, јер ако је н. пр. брзина у положају M' наперена према оси симетрије онда је брзина у положају M наперена од те оси. Интензитети фиктивне силе $2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$ су у оба положаја исти, у оба положаја стоје те силе нормално на путању, а наперене су на ону страну са које посматрамо вектор $\mathfrak{v}$ надовезан на $\mathfrak{a}_0$ даје позитиван смисао обилажења, зато ће те силе у оба положаја бити симетрично наперене према оси X.

Симетричним положајима кинематско симетричних путања одговарају симетричне фиктивне силе.

Те силе ће променити, додуше, облик путање но неће уништити њену симетрију. Услов за кинематску симетрију и периодицитет кретања остају исти као и у пређашњем случају. Свака тачка осе X може постати положај кинематске симетрије, па узмогне ли се иницијална брзина мобилне тачке тако одредити да ова пролази кроз два положаја кинематске симетрије, то ће кретање њено у мобилном систему бити периодично.

Фиктивна сила $2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$ стоји увек нормално на путању, нема, дакле, тангенцијалне компоненте и не утиче, због тога, на промену величине брзине мобилне тачке него само на кривину путање. Када би она сама дејствовала неби се мењала величина брзине, па због тога ни интензитет саме те силе, радиус кривине путањине остао би константан, мобилна тачка описивала би круг. Утицај осталих сила пертурбира то кружно кретање, но тај је утицај тим мањи што су те силе мање. У близини места где те силе изчезавају, дакле у околини тачке $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0$ $(x=x_0,$ $y=y_0)$, где је

$$\operatorname{grad} V \Big\}_{\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0} = \frac{dV}{dx_0}\,\mathfrak{i} + \frac{dV}{dy_0}\,\mathfrak{j} = o \qquad 49)$$

т. ј. у близини положаја равнотеже поља V моћи ће се периодична кретања директно одредити, као што из следећег следује.

Ако је поље континуирно, то је у близини тих места

$$\operatorname{grad} V = \frac{dV}{dx}\,\mathfrak{i} + \frac{dV}{dy}\,\mathfrak{j}$$

веома малено, па се може развити по Taylor-овом реду

Означимо ли

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{f}$$

т. ј.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 50)$$

$$\mathfrak{f} = \xi\mathfrak{i} + \eta\mathfrak{j}$$

то је ξ и η веома малено, па занемаримо ли њихове друге потенције, то добивамо

$$\operatorname{grad} V = \left(\frac{dV}{dx_0} + \frac{d^2V}{dx_0^{\,2}}\,\xi + \frac{d^2V}{dx_0dy_0}\,\eta\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{dV}{dy_0} + \frac{d^2V}{dx_0dy_0}\,\xi + \frac{d^2V}{dy_0^{\,2}}\,\eta\right)\mathfrak{j} = \left(\frac{d^2V}{dx_0^{\,2}}\,\xi + \frac{d^2V}{dx_0dy_0}\,\eta\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{d^2V}{dx_0dy_0}\,\xi + \frac{d^2V}{dy_0^{\,2}}\,\eta\right)\mathfrak{j} \qquad \ldots 51)$$

а како је, осим тога

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\,\mathfrak{i} + \frac{d^2\eta}{dt^2}\,\mathfrak{j} \qquad \ldots 52)$$

$$2n\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0] = 2n \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \dfrac{d\xi}{dt} & \dfrac{d\eta}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2n\left(\frac{d\eta}{dt}\,\mathfrak{i} - \frac{d\xi}{dt}\,\mathfrak{j}\right) \qquad \ldots 53)$$

то једначина кретања 45) растављена у две скаларне једначине добива овај облик

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\,\frac{d\eta}{dt} - \frac{d^2V}{dx_0^{\,2}}\,\xi - \frac{d^2V}{dx_0dy_0}\,\eta &= o \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\,\frac{d\xi}{dt} - \frac{d^2V}{dx_0dy_0}\,\xi - \frac{d^2V}{dy_0^{\,2}}\,\eta &= o \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 54)$$

Ове хомогене линеарне диференцијалне једначине дозвољавају периодична решења: ξ и η биће периодичне функције од t, па ће се иницијални услови моћи тако одабрати да ξ и η остане увек малено.

Пример за оваково случајеве периодичних кретања су периодична кретања у „астероидичном проблему."

Под „астероидичним проблемом" разумевамо испитивање кретања једне безконачно малене масе (астероида) привлачене по Newton-овом закону од две коначне масе, које се, услед међусобног привлачења по истом закону, крећу око заједничког тежишта у концентричним круговима истом, константном, угловном брзином, а чије кретање не пертурбира мала маса, која се креће у истој равнини у којој се крећу обе коначне масе.

Обе коначне масе изазивају једно потенцијално поље, аксијално симетрично према правој која кроз њих пролази. То поље је перманентно а ротира константном, угловном брзином око тежишта коначних маса. Сваки нормални пролаз астероида кроз осу симетрије тога поља биће положај нормалне кинематске симетрије. Такове пролазе назива Poincaré „conjonction symétrique" или „opposition symétrique" према томе дали се астероид налази између коначних маса или изван њих.[1]) Два такова пролаза условљавају периодично кретање.

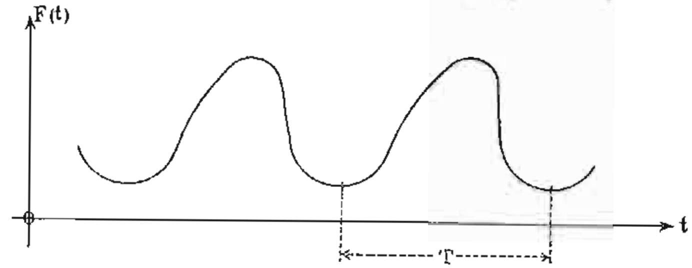
У близини положаја равнотеже сложенога поља V могу се периодична кретања, према пређашњем, директно одредити, па су једначине 54) идентичне са Hill-овим једначинама за периодична кретања у близини центара либрације.

[1]) Види н. пр. Poincaré, Leçons de Mécanique céleste. Paris. 1905. Tome I. стр. 198.

О симетрично периодичним функцијама. Функцију F независне варијабилне t називамо периодичном са периодом T ако она задовољава једначину

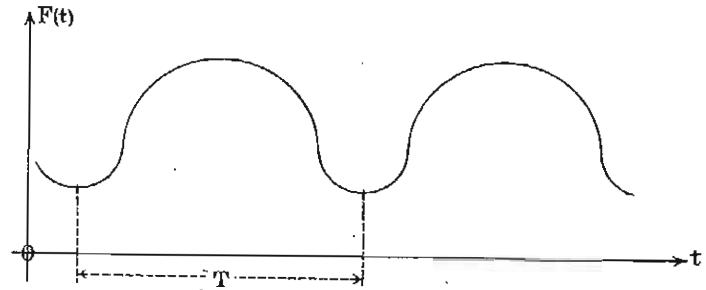
$$F(t) = F(t + nT),$$

где је n произвољан цео број. Геометријска представа оваковe функције у ортогоналном координатном систему, где абсцисну осу узимамо за осу t, биће једна таласаста линија (сл. 9), састављена из самих конгруентних делова који одговарају интервалу T.



Сл. 9.

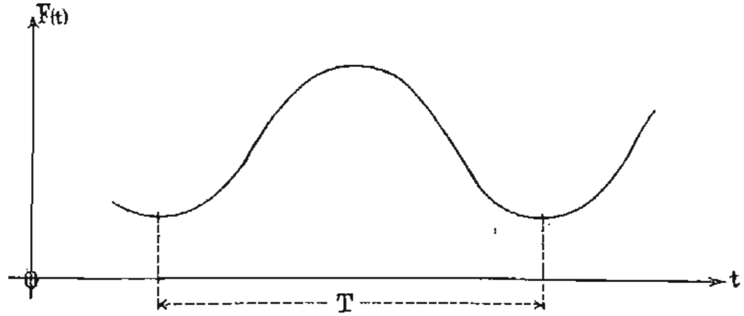
Обично се узима да се почетци интервала подударају са минималним вредностима функције $F(t)$. За проблеме динамике су од особите важности оне периодичне функције код којих су такове геометријске



Сл. 10.

представе симетричне линије. Онда сваки интервал има два положаја симетрије S_1 и S_2 (сл. 10) па свака минимална и максимална вредност функције $T(t)$ одговара таковом једном положају симетрије.

Још је важнији случај када су делови горње криве конвексни у позитивном смислу ординантне осе конгруентни деловима конвексним у негативном правцу те осе. Онда та крива има, осим наведених



Сл. 11.

положаја симетрије S_1 и S_2 који одговарају минималним и максималним вредностима функције $F(t)$, још у сваком интервалу по два положаја S_3 инфлексионалне симетрије који одговарају средњој вредности функције $F(t)$. (сл. 11).

Ове последње две категорије периодичних функција назваћемо *симетрично-периодичним функцијама* прве односно друге категорије. Такове су функције н. пр. тригонометријске функције, од којих су за проблеме физике од специјалне важности функције sinus и cosinus, јер оне нису дисконтинуирне.

Ако је независна варијабилна t време, онда ћемо њене вредности t_0 и t_1, у којима функција $F(t)$ достизава своје минималне или максималне вредности, назвати *моментима симетрије*, јер у том случају функција $F(t)$ добива у истим временским одстојањима пре и после тога момента исте вредности, па је

феномен, представљен таковом функцијом, симетричан према том моменту.

Периодична кретања мобилне тачке у симетричном потенционалном пољу које је симетрично-периодична функција времена. Посматрано потенцијално поље нека буде симетрично-периодична функција времена са периодом T па нека буде увек симетрично према оси X т. ј. нека потенцијална функција

$$U = U\,(x,\ y,\ t)$$

буде инваријантна према субституцији $y = -y$

Из дефиниције симетрично-периодичних функција и из напред изведених својстава симетричних поља следује да ће кретање мобилне тачке бити кинематски симетрично онда када она у једном од симетричних момената времена прође нормално кроз осу X, јер онда ће она у два произвољна симетрична положаја M и M' према оси X наићи на исте вредности потенцијалне функције U. Кретање мобилне тачке биће периодично ако она у два разна момента симетрије прође нормално кроз осу X.

Кроз сваку тачку осе X моћи ће се положити безконачно много симетричних путања варирајући интензитет нормалне иницијалне брзине, којом мобилна тачка пролази кроз ту тачку осе X у моменту симетрије, па ће се — изузев специјалне случајеве — од тих путања моћи одабрати она која при једном од следећих пролаза нормално пресеца осу X. Но кретање мобилне тачке биће по таковој путањи периодично само онда ако се и тај други пролаз деси у моменту симетрије. То ће се моћи постићи тек избором прве пролазне тачке, па се зато периодичне путање могу положити само кроз неке од тачака осе X.

Периодична кретања мобилне тачке у ротирајућем симетричном пољу које је симетрично-периодична функција вршена. Ротира ли пре посматрамо поље око једне осе, која је нормална на његову равнину, то треба ефективним силама, које на мобилну тачку утичу, додати још две фиктивне силе: центрифугалну силу и Coriolis-ову силу. Ако је угловна брзина ротације n константна, онда не мења — као што смо показали — центрифугална сила $mn^2 r r_0$ ни симетрију поља ни услове за кинематски симетрични кретања; исто је тако и Coriolis-ова сила $2mn\,[\mathfrak{v}\mathfrak{a}_0]$ за кинематски симетрична кретања симетрична па не уништава такова кретања ако су остали услови за њих испуњени.

Питајмо сада када ће те фиктивне силе дозволити кинематски симетрична кретања ако угловна брзина n није константна већ функција времена?

Посматрано поље U је симетрично-периодична функција времена зато би, према пређашњем, мобилна тачка извела кинематски симетрична кретања када би у моменту симетрије функције времена U нормално прошла кроз осу X. Да та мобилна тачка при пролазима кроз два симетрична положаја M и M' према оси X наиђе на једнаке фиктивне силе, очито је потребно да је и угловна брзина n симетрично периодична функција времена t, па да се њен моменат симетрије подудара са моментом пролаза мобилне тачке кроз осу X, дакле са моментом симетрије функције U.

Периодична кретања мобилне тачке настаће ако она при једном од следећих пролаза кроз осу X прође нормално кроз њу и ако је моменат тога прелаза моменат симетрије функција времена U и n.

За симетрично периодична кретања мобилне тачке потребно је, према томе, да су периоде симетрично-периодичних функција времена U и n комензурабле и да оне имају заједничких момената симетрије или као што би се могло покраћено да каже, да су обе функције *синхронизиране.*

Пример за ову категорију периодичних кретања пружа нам проблем трију тела у равнини ако је једна од маса безконачно малена; онда она не пертурбира кретање осталих двају коначних маса, па зато ове извађају око њиховог заједничког тежишта Kepler-ове елипсе. Положимо ли кроз те две масе осу X нашега координатног система, то ће потенцијално поље, изазвано тим масама, бити симетрично према тој оси, а функција одстојања тих двају тела, које се мења временом. Како је релативно кретање једнога од коначних тела око другога кретања по Kepler-овој елипси, дакле кинематски периодично кретање са два положаја симетрије, то ће одстојање тих тела, а према томе и функција U бити симетрично-периодична функција времена t са моментима симетрије када одстојање достизава своју максималну или минималну вредност. Углова брзина n такође је симетрично-периодична функција времена па достизава своју максималну вредност када су коначна тела најближа, а минималну вредност када су најдаља: функције времена U и n имају исту периоду па се зато синхронизиране. Трећа, безконачно малена, маса извађа ће периодична кретања ако прође у два момента, која се подударају са моментима симетрије функција времена U и n, нормално кроз осу X, т. ј. ако ступи са остале две масе у симетричне конјункције или опозиције у моменту када се коначне масе налазе у максималном или минималном међусобном одстојању.

Конструкција нових случајева периодичних кретања. Досадање резултате можемо употребити за конструкцију нових случајева периодичних кретања у проблему трију и проблему четири тела. Принцип конструкције биће као у досадањим случајевима: тела ће се ставити у такав иницијалан положај са таквим иницијалним брзинама да тај положај буде положај кинематске симетрије. Условом те симетрије неће у опште бити одређене све иницијалне константе, па ће се још неодређене од тих константата тако одредити да условљавају још један положај кинематске симетрије и, због тога, периодично кретање посматраних тела.

У проблему трију тела ми смо, до сада, предпоставили да је једна од маса безконачно малена, па смо том предпоставком осигурали симетрију потенцијалног поља изазваног масама посматраних тела. Напуштајући ту претпоставку можемо положај кинематске симетрије у иницијалном моменту остварити па два начина.

Прво, да све три масе ставимо у иницијалном моменту у једну праву, па им дамо паралелне иницијале брзине нормално на ту праву. Ако буде могуће иницијалну констелацију тако удесити да сва три тела дођу, после извесног времена, опет у исту праву и пресеку ју нормално, онда ће и тај положај бити положај кинематске симетрије; кретања посматраних тела биће периодична. Са овом категоријом периодичних кретања бавио се је Griffin, Certain periodic orbits of k finite bodies revolving about a relatively large central mass; Transactions of the American Mathematical Society 9. Специјалан је случај ове категорије када сва три тела остану увек у истој правој; онда добивамо познато егзактно решење Lagrange-ово.

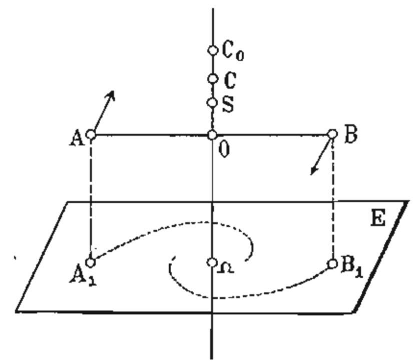
Други начин да у иницијалном моменту остваримо положај кинематске симетрије је овај: Две од маса посмараних тела одаберу се једнаке:

$$m_1 = m_2 = m$$

трећа, такође коначна маса,

$$m_3 = \mu$$

стави се у иницијалном моменту на симетралу првих двеју, а иницијалне брзине одаберу се тако да она на тој симетрали увек и остане. У то име се иницијалне брзине маса m управе нормално на иницијалну равнину трију тела тако да сачињавају један векторски спрег; иницијална брзина масе μ узме се равна нули. Означимо ли иницијални положај масе μ са C_0, а инваријабилни положај тежишта свих трију маса са S то је права C_0S једна непомична права простора према којој остају масе m, због симетрије иницијалног положаја и иницијалних брзина, непрестано симетричне. Из тога ће разлога и резултанта сила, којом дејствују масе m на масу μ падати увек у праву C_0S, па ће се зато маса μ кретати непрестано по прави C_0S.



Сл. 12.

Означимо ли моментане положаје маса m са A и B, а тачку која полови дужину AB са O, то ће брзина масе μ расти или опадати према томе дали се она приближује или удаљује од тачке O; у тој тачки, у којој је интензитет узрока промене брзине раван нули, достизава брзина масе μ свој максимум. Релативно кретање масе μ према тачки O имаће осцилаторан карактер. Тачка O није непомична у простору, него се и она креће по истој правој CS по којој се креће и маса η, но то је кретање таково да тежиште S свих трију маса остане непоремећено. Означимо ли одстојање масе μ од тачке O са z, а од тежишта S са φ, то је, према закону о кретању тешишта:

$$\varphi = \frac{2m}{2m+\mu} z.$$

Како је z осцилаторна функција времена, то ће и φ бити такова функција, па зато има и абсолутно кретање масе μ осцилаторан карактер само су осцилације тога абсолутног кретања умањење у размери $\frac{2m}{2m+\mu}$ према релативним осцилацијама маса μ обзиром на тачку O.

Резултанта сила, које утичу на једну или другу од маса m пролазе увек кроз праву C_0S простора. Кретање тих маса у правцу C_0S има исти осцилаторни карактер као и кретање масе μ са заједничким моментима амплитудних положаја, а кретање пројекција A_1 и B_1 тих маса на једну непомичну равнину E нормалну на праву C_0S следоваће по закону површина и бити таково као када би те тачке A_1 и B_1 биле привлачене од тачке Ω, (продорне тачке праве C_0S и равнине E) једном централном силом, но та сила не зависи само од одстојања маса m од праве C_0S него и од положаја масе μ према масама m дакле

посредно и од времена. Ако су кретања посматраних маса симетрично периодична, онда можемо кретања фиктивних тачака A_1 и B_1 сматрати као кретања у једном централно симетричном пољу које је симетрично-периодична функција времена, па ће услов за таково периодично кретање бити да те тачке прођу, осим у иницијалном моменту, у једном моменту симетрије кроз положаје симетрије који се, према пређашњем, подударају са максималним или минималним одстојањима тих тачака од тачке Ω. Услов за периодична кретања биће, према томе, тај, да масе m достигну — осим у иницијалном моменту — своје максимално или минимално одстојање од праве C_0S у ономе моменту када маса μ прође кроз своје положаје симетрије, т. ј. када њена кинетична енергија достигне своју екстремну вредност, дакле прође кроз тачку O или достигне своју максималну елотацију од те тачке. Покраћено можемо казати да кретања у правцу C_0S и нормално на тај правац морају бити синхронизирана.

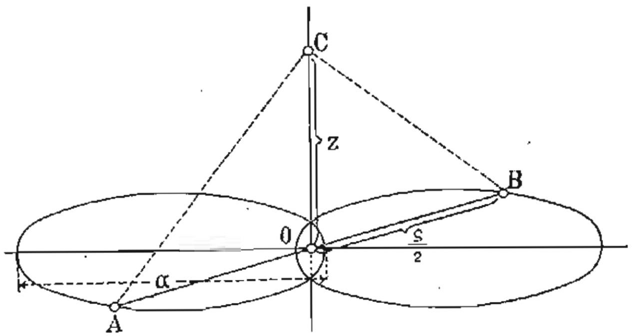
Та синхронизација се постизава мењањем интензитета иницијалних брзина маса m или мењањем иницијалног одстојања масе μ од маса m, па се може провести на бесконачно много начина: кретање ће бити синхронизирано ако се n-ти пролаз масе μ кроз тачку O или кроз један од њених амплитудних положаја подудари са r-тим екстремним одстојањем маса m од осе C_0S, при чему су n и r произвољни цели бројеви.

Из резултата наше радње: О општим интегралима проблема n тела[1]) следује да се посматрана три тела не могу никада сукобити, јер би у моменту

[1]) Глас LXXXIII.

сукоба, који би се могао десити само на правој C_0S, хетераптични збир вектора квантитета кретања, који би се у томе моменту секли сви у једној тачки, дегенерисао на један једини вектор, а то не може да буде, јер иницијални вектори квантитета кретања дају — према одабраним иницијалним условима — један векторски спрег.

Специјални случајеви. Ако је маса μ бесконачно малена онда она неће пертурбирати кретање маса m, па ће ове, не прекораче ли интензитети њихових иницијалних брзина извесну граничну вредност, описивати око заједничког им тежишта Kepler-ове елипсе. Њихово кретање биће, дакле, познато, па ће за потпуно решење проблема требати да се реши још само једна диференцијална једначина. Означимо, у то име, одстојање m са ϱ, одстојање масе μ од равнине у



Сл. 13.

којој се крећу масе m са z, велику осу елипса што их описују свака од маса m са a, двоструки нумерички ексцентрицитет тих елипса са ε, то је велика полуоса елипсе, што ју описује једна од маса m при своме релативном кретању око друге масе, једнака a, а њен нумерички ексцентрицитет једнак је ε; та ће

се маса кретати око друге тако као кад би ова друга била непомична, а привлачила прву силом:

$$\frac{2fm^2}{\varrho^2}$$

где f означава гравитациону константу. Зато ће однос између одстојања ϱ маса m и времена t бити регулисан једначином[1]):

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2fm}} \; \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (a-\varrho)^2}} \quad \ldots\ldots 55)$$

помоћу које се познатим начином одређује ϱ као функција времена t. ϱ ће бити симетрично-периодична функција од t, а њезина периода T је време релативног обилажења једне од маса m око друге, дакле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{2fm}} \quad \ldots\ldots 56).$$

Сила, која утиче на масу μ, једнака је:

$$2f\frac{m\mu}{\overline{CB}^2}\cdot\frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} = 2fm\mu\frac{z}{\left(\frac{\varrho^2}{4}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

па је зато диференцијална једначина кретања масе μ

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -2fm\frac{z}{\left(\frac{\varrho^2}{4}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots 57)$$

[1]) Види н. пр. Appell, Traité de Mécanique rationelle. Deuxième édit. Paris 1902. Tome I, стр. 401.

Елиминишемо ли из једначина 55) и 57) време t, то добивамо:

$$\frac{d^2z}{d\varrho^2} = -a \frac{\varrho^2 z}{\left(\frac{\varrho^2}{4} + z^2\right)^{\frac{3}{2}} [a^2\varepsilon - (a-\varrho)^2]} \quad \cdots\cdots 58)$$

Интеграција ове једначине не полази за руком, па зато није могуће одредити z као функцију времена t, но поред свега тога следују из пређашњих резултата следеће карактерне особине те функције

$$z = \Phi(t).$$

Маса μ осцилира око тачке O, па ће због тога и горња функција имати осцилаторан карактер. Она ће постати периодична и то симетрично-периодична ако у моменту симетрије поља, изазванога масама m, кинетична енергија масе μ достигне своју екстремну вредност. Одаберемо ли као почетни моменат за мерење времена т. ј. за време $t = o$ моменат када се масе m налазе у максималном или минималном међусобном одстојању, то су моменти симетрије варијабилнога поља кинематских маса моменти

$$o, \frac{T}{2}, T, \frac{3}{2}T, 2T \cdots\cdots$$

једном речи вредности

$$t = \frac{n}{2}T,$$

где је произвољан цео број, или

$$t = \pi n \sqrt{\frac{a^3}{2fm}}$$

Кинематична енергија масе μ достизава своје екстремне вредности при пролазу те масе кроз тачку O, т. ј. за

$$z = \Phi(t) = o$$

или при екстремним елонгацијама масе μ од тачке O, т. ј. за:

$$\frac{dz}{dt} = \Phi'(t) = o$$

зато можемо да кажемо:

Изчезава ли функција $\Phi(t)$ или њен први извод $\Phi'(t)$ у једном моменту

$$t = \pi n \sqrt{\frac{a^3}{2fm}}, \quad \cdots\cdots 59)$$

где је n произвољан цео број, то је та функција симетрично периодичка функција.

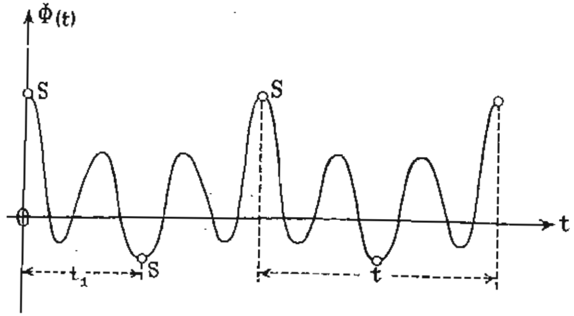
Једна периода функције $\Phi(t)$ садржаваће у себи два пута толико осцилација те функције колико осцилација изводе маса μ око тачке O од иницијалног момента па до првог следећег момента кинематске симетрије. Одаберемо ли абсцисну осу за осу t, а ординатну осу за осу $\Phi(t)$ то ће геометријска представа функције $\Phi(t)$ имати облике представљене шематски у сл. 14 и 15.

Ако је t_1 први моменат иза иницијалног момента који задовољава једначину 59), то ће ако:

а) у њему изчезава први извод $\Phi'(t)$ функције $\Phi(t)$ периода τ те функције бити

$$\tau = 2t_1$$

и она ће спадати у прву категорију симетрично-периодичних функција, т. ј. њени делови са једне стране осе t неће бити конгруентни њеним деловима са друге стране осе t (сл. 14)

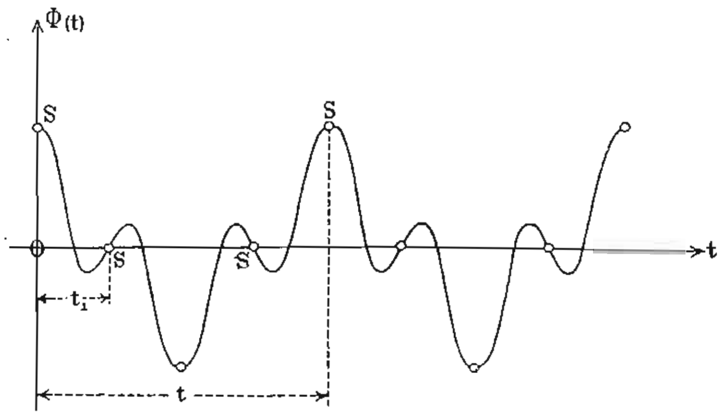


Сл. 14.

б) у њему изчевава функција $\Phi(t)$ периода τ те функције бити

$$\tau = 4t_1$$

и она ће спадати у другу категорију симетрично-периодичних функција, т. ј. њени делови са једне стране



Сл. 15.

осе t биће конгруентни њеним деловима са друге стане осе t (сл. 15).

Ако је ексцентрицитет ε раван нули, што се може избором иницијалних констаната увек да постигне, онда се обе масе крећу на кругу радиуса a па сила која утиче на масу μ зависи само од одстојања z. Зато у овоме случају једначина кретања те масе добива облик:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -2fm\frac{z}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots 60)$$

Помножимо ли обе стране ове једначине са dz па интегришемо, то добивамо:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2fm\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} + C$$

Означимо ли иницијално одстојање масе μ од тачке O са h то је

$$\begin{cases} \text{за } t = o \\ z = h \qquad \dfrac{dz}{dt} = o \end{cases}$$

којим условом можемо одредити константу C. Зато је

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4fm\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \cdots\cdots 61)$$

Уведемо ли као нову варијабилну одстојање ξ масе μ од једне од маса m, т. ј.

$$a^2 + z^2 = \xi^2 \quad \cdots\cdots 62)$$

па означимо још

$$a^2 + h^2 = k^3 \quad \cdots\cdots 63)$$

то горња диференцијална једначина добива облик:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4fm\,\frac{(\xi^2 - a^2)(k - \xi)}{k\xi^3}$$

Одавде следује:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{fm}}\int\frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi(\xi^2 - a^2)(k - \xi)}} \cdots\cdots 64)$$

Време t изражава се елиптичним интегралом као функција координате ξ посматране мобилне тачке μ, па ће се, због тога, та координата ξ моћи изразити помоћу елиптичних функција као функција времена t. Но како је

$$z = \Phi(t) = \sqrt{\xi^2 - a^2}$$

то можемо да кажемо:

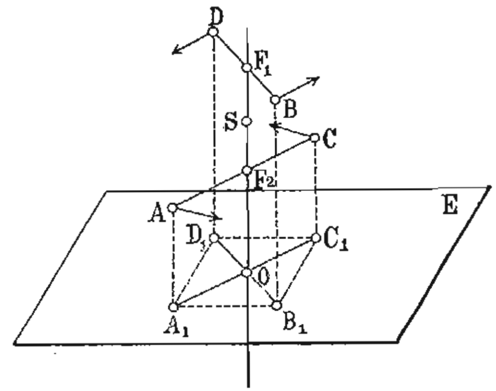
Функција $z = \Phi(t)$

дегенерише у случају $\varepsilon = o$ на елиптичне функције.

Један специјалан случај проблема четири тела за који се може помоћу кинематске симетрије доказати периодицитет кретања је овај:

Четири тела A, B, C, D једнаке масе распоређена су у иницијалном моменту тако да пројекције њихове на једну непомичну равнину E леже на угловима једнога квадрата $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$. Два и два од тих тела којих пројекције леже на истој дијагонали тога квадрата једнако су удаљена од равнине E тако да су праве AC и BD у иницијалном моменту укрштене праве нормалне једна на другу, а паралелне равнини E. Иницијалне брзине су истога интензитета,

поралне равнини E, нормалне на праве AC и BD, а наперене тако да заокрећу обе праве у истоме смислу. Оне, дакле, сачињавају два векторска спрега којих су осе нормалне на равнину E. Иницијални распоред је такав да су масе и брзине симетричне према правој $F_1 F_2$ која спаја средине права AC и BD у иницијалном моменту и која је, према томе, једна одређена права простора.



Сл. 16.

Да испитамо природу кретања раставимо га у два компонентална кретања, од којих је једно паралелно оси $F_1\ F_2$, а друго равнини E. Што се тиче првога од ових кретања, то су силе, које у правцу осе $F_1\ F_2$ дејствују на посматрана четири тела истога интензитета, а наперене према заједничком тежишту S маса које је непомично у простору. Друго компонентално кретање неће, као што ћемо одмах видети, реметити једнакост тих сила, па ће због тога праве AC и BD остати непрестано паралелне равнини E а осцилирати око тежишта S.

Што се тиче другога компоненталног кретања, представљеног кретањем пројекција A_1, B_1, C_1, D_1, то су положаји тих пројекција, њихове фиктивне масе и силе које на њих утичу симетричне према оси $F_1\ F_2$ или према продорној тачки O те осе са равнином E, па ће та централна симетрија остати очувана у свима следећим моментима. Зато ће пројекције A_1, B_1, C_1, D_1 посматраних тела на равнину E ограничавати увек један квадрат са центрумом у O, па ће се те пројекције кретати по принципу површина око тачке O. Једном речи: посматрана тела кретаће се тако да ће праве AC и BD мењати своје положаје и своје дужине но остати у сваком моменту међусобно једнаке, нормалне једна на другу, паралелне равнини E, а осцилирати око заједничког тежишта S. Зато је довољно испитати кретање само једнога од посматраних тела, јер положаји осталих добивају се из услова симетрије. Уочимо ли, н. пр., кретање тела A па посматрамо оба његова компоненталпа кретања, то ће прво од тих кретања у правцу осе $F_1 F_2$ бити праволинијско и осцилаторно а друго, кретање пројекције A_1 равно кретање под утицајем једне централне силе која пролази кроз тачку O. Та сила не зависи само од другог него и од првог компоненталног кретања. Но иницијалан моменат је за оба компонентална кретања моменат кинематске симетрије, јер се пројекција тачке A на осу $F_1 F_2$ налази у максималном одстојању од тачке S, око које она осцилира, дакле у амплитудном положају, а и пројекција A_1 налази се, јер јој је иницијална брзина нормална на радиусвектор OA_1, у положају нормалне кинематске симетрије. Зато ће кретање тела A, а према томе и свих осталих тела бити периодично ако она за време кретања дођу у још један положај кинематске симетрије. То ће наступити онда ако у моменту када се праве AC и BD налазе у максималном међусобном одстојању (у ампитудном положају) или када се секу, пројекције A_1, B_1, C_1, D_1 дођу у своје максимално или минимално одстојање од тачке O.

Та синхронизација обају компоненталних кретања може се постићи избором иницијалних констаната, па остаје још да докажемо да ће кретање бити стабилно у ширем смислу речи, т. ј. да се посматрана тела неће за време кретања сукобити него да ће њихова одстојања остати коначна.

Иницијални вектори квантитета кретања редукују се, према пређашњем, на један векторски спрег, којега је оса нормална на равнину E и која се може, због тога, положити у осу $F_1 F_2$. Сукобе ли се два од посматраних тела, то се, због симетрије према оси $F_1 F_2$, тај сукоб може десити само у тој оси, но из истога разлога морају се у истом моменту и остала два тела у тој оси сукобити. У моменту сукоба редукују се, према томе, вектори квантитета кретања на два појединачна вектора који секу осу $F_1 F_2$ или на један једини вектор ако се сва четири тела у истој тачки сукобе. Ни у једном ни у другом, од ових двају случајева не дају вектори квантитета кретања један векторски спрег којега би оса пала у осу $F_1 F_2$ као што то захтевају иницијални услови, па је, због тога, сукоб немогућ; кретање је стабилно.

Леже ли ова четири тела у иницијалном моменту у истој равнини онда овај случај дегенерише на једно од егзактних решења Laplace-ових. Посматрана тела описују у томе случају елипсе, ограничавајући увек један квадрат који мења свој положај и величину.

Примедба о вредности специјалних решења у проблемима небеске механике. У доба, када се је још могло мислити на могућност општих решења проблема небеске механике, није специјалним решењима давана особита вредност. Сам Lagrange, који је нашао прва специјална решења у проблему трију тела, рекао је за њих[1]): „Cette recherche n' est à la vérité que de pure curiosité“.

Тек сто година касније, када је Hill-у пошло за руком да нађе нове категорије периодичних решења проблема трију тела,[2]) која су у тесној вези са Lagrange-овим решењима, почело се је о њиховој вредности друкчије мислити. Говорећи о радовима Hill-овим вели Poincaré[3]): „Dans cette oeuvre malheureusement inachevée il est permis d' apercevoir le germe de la plupart des progrès que la Science a faits depuis“. А на једном другом месту,[4]): „D' ailleurs ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c' est qu' elles sont, pour ainsi dire, la seule bréche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable“. У једној радњи, која се бави једним специјалним случајем проблема трију тела[5]) вели Haerdtl: „Dass wir uns heute von den Bewegungserscheinungen in einem System von mehr als zwei Körper keine oder eine nur höchst unvollkommene Vorstellung zu machen im Stande sind, glaube ich kann nicht geleugnet werden, und ich erblicke mit Gyldèn hierin eine Hauptursache wesshalb uns die Lösung des Problems der drei Körper so schwierig erscheint. Von Gyldén ist auch meines Wissens zuerst auf einen Weg hingewiesen worden auf dem diesem Uebelstand möglicherweise abgeholfen und die Erweiterung unseres Vorstellungsgebietes erreicht werden könnte, nämlich

[1]) Lagrange, Oeuvres VI, стр. 230.

[2]) American Journal of Mathematics t. I; Acta mathematica t. VIII.

[3]) Poincaré, Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste стр. 3.

[4]) Jbid. стр. 82.

[5]) Haerdtl, Skizzen zu einem speciellen Fall des Problems der drei Körper. (1892). Abhandlungen der mathem-physik. Classe der königl. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 17.

die Untersuchung einer Reihe von Specialfällen dieses Problems....“

Тако се данас, после неуспелих покушаја читавог једног столећа да се проблем трију тела у свој потпуности реши, радови научењака на том пољу ограничавају већим делом на испитивање специјалних случајева и на класификацију њихову у категорије. Нарочита пажња обраћа се периодичним решењима а та би се према нашој дефиницији симетрично-периодичних функција, могла класификовати прије свега у две главне категорије; у симетрично и асиметрично периодична решења. Прва категорија биће ваљда од веће важности него друга, јер сва до сада нађена периодична решења припадају тој категорији. Теорија кинематске симетрије, коју смо у овој радњи покушали да скицирамо, може послужити као корисно оруђе при налажењу и испитивању периодичних решења те категорије.