ОСОБИНА КРЕТАЊА У ЈЕДНОМЕ СПЕЦИЈАЛИЗИРАНОМ ПРОБЛЕМУ ТРИЈУ ТЕЛА.

од

Д-р Милутина Миланковића

ванр. проф. универзитета

(Примљено на скупу Академије природних наука 11. децембра 1909.).

У овоме чланку доказаћемо једну особину кретања трију тела, која се међусобно привлаче (или одбијају) и која су постала из једнога тела тиме, што се је оно у три дела распало. Предпостављамо, да на ова три тела, осим њихових међусобних утицаја, не дејствују никакове друге силе, да су њихови међусобни утицаји према принципу реакције увек два и два једнака, а противнога правца. Иначе могу ти утицаји да буду произвољне функције положаја, брзине и времена, но континуирне у проматраноме простору. Не мора се такође да предпостави, да се је првобитно тело, из којега су проматрана три тела постала, у један мах у три тела распало, него се може узети, да се је оно прво распало у два секундерна тела, од којих се је једно затим још у два тела раздвојило тако, да су свега три терцијерна тела постала.

Проматраћемо кретање тих терцијерних тела с обзиром на ортогонални координатни систем, који се — као да је био непромењиво скопчан са првобитним телом — креће истим једнаким праволинијским транслаторним кретањем, којим се је кретало прво-

битно тело, на којега нису никакове спољне силе дејствовале. Почетак тога координатног система положимо у тежиште — сада фиктивног — првобитног тела, које ће према принципу одржања тежишта бити и тежиште читавог система трију тела. Правце оса тога координатног система одаберимо овако: Јасно је, да ће се, када се првобитно тело у два секундерна распадне, тежишта ових двају тела кретати у једној правој која пролази кроз почетну тачку нашега координатног система. Кроз ту праву и кроз векторе почетних брзина, којима се тежишта двају нових терцијерних тела кренуше, ићи ће равнина путања тежишта терцијерних тела. Ту равнину одаберимо за равнину X, Y нашега координатног система.

Означимо са m_1, m_2, m_3 масе трију проматраних тела и замислимо их концентрисане у тежиштима тих тела, тако да су тела замењена материјалним тачкама, којих координате нека буду означене са x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3.

Првобитно тело — замишљено у почетној тачки нашег координатног система — распрштало се је унутарњим силама, па зато морају да постоје једначине:

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Ако диференцијалимо ове једначине по времену t, то добијамо једначине:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} + m_3 \frac{dx_3}{dt} &= 0 \\ m_1 \frac{dy_1}{dt} + m_2 \frac{dy_2}{dt} + m_3 \frac{dy_3}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

које изражавају принцип о квантитету кретања.

Поновно диференцијалење ових једначина даје:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = 0 \\ m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} + m_3 \frac{d^2y_3}{dt^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad 3)$$

Ако сад означимо са X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, ортогоналне компоненте сила, што дејствују на проматране три материјалне тачке m_1, m_2, m_3, то је:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 \; m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = X_2 \; m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = X_3 \\ m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 \; m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = Y_2 \; m_3 \frac{d^2y_3}{dt^2} = Y_3 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad 4)$$

Из једначина 4) следује једначина:

$$m_1 \left(x_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) + m_2 \left(x_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} - y_2 \frac{d^2x_2}{dt^2}\right) +$$

$$m_3 \left(x_3 \frac{d^2y_3}{dt^2} - y_3 \frac{d^2x_3}{dt^2}\right) = (x_1 Y_1 - y_1 X_1) +$$

$$+ (x_2 Y_2 - y_2 X_2) + (x_3 Y_3 - y_3 X_3)$$

Десна страна ове једначине равна је нули, јер представља збир статичних момената унутарњих сила проматранога система трију тела обзиром на почетну тачку координатног система, па се зато тој једначини може дати овај облик:

$$\frac{d}{dt}\left[m_1 \left(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt}\right) + m_2 \left(x_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dx_2}{dt}\right) + \right.$$

$$\left. + m_3 \left(x_3 \frac{dy_3}{dt} - y_3 \frac{dx_3}{dt}\right)\right] = 0$$

Интеграција ове једначине даје закон о одржању момента квантитета кретања. Овај моменат је за интервал времена пре но што се је прво-

битно тело распрсло раван нули, а не мења се ни после распрштења, јер су промене квантитета кретања једнаке импулсијама, а импулсије, које су се при распрштењу појавиле, увек су две и две једнаке, противнога правца, а леже на истој правој. Зато ће и интеграл горње једначине бити раван нули, па ће да постоји једначина:

$$m_1 \left(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt}\right) + m_2 \left(x_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dx_2}{dt}\right) +$$

$$+ m_3 \left(x_3 \frac{dy_3}{dt} - y_3 \frac{dx_3}{dt}\right) = 0 \quad \cdots \quad 5)$$

Проматрајмо сада моментање, истовремене правце кретања трију тела. Праве, у које ти правци кретања падају, представљене су једначинама:

$$\eta - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1} (\xi - x_1)$$

$$\eta - y_2 = \frac{dy_2}{dx_2} (\xi - x_2)$$

$$\eta - y_3 = \frac{dy_3}{dx_3} (\xi - x_3)$$

где ξ и η означују текуће координате произвољне тачке на тим правама.

Дајмо тим једначинама следећи облик:

$$\left.\begin{aligned} \xi\, dy_1 - \eta\, dx_1 + (y_1\, dx_1 - x_1\, dy_1) = 0 \\ \xi\, dy_2 - \eta\, dx_2 + (y_2\, dx_2 - x_2\, dy_2) = 0 \\ \xi\, dy_3 - \eta\, dx_3 + (y_3\, dx_3 - x_3\, dy_3) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad 6)$$

помножимо прву од њих са m_1, другу са m_2, а трећу са m_3 и саберимо их, то добијамо једначину:

$$(m_1\, dy_1 + m_2\, dy_2 + m_3\, dy_3)\, \xi - (m_1\, dx_1 + m_2\, dx_2 +$$

$$+ m_3 dx_3)\, \eta - \{m_1(x_1 dy_1 - y_1 dx_1) + m_2(x_2 dy_2 - y_2 dx_2) +$$

$$+ m_3(x_3 dy_3 - y_3 dx_3)\} = 0 \quad \cdots \quad 7)$$

Ова је једначина с обзиром на једначине 2) и 5) идентично задовољена, а то значи, да се све три праве секу у једној тачки.

Зато можемо резултат овога чланка, да формулишемо у теореми:

Правци моментаних релативних кретања тежишта трију тела, посталих из једнога првобитнога тела, с обзиром на координатни систем, који се креће истим праволинијским кретањем као и првобитно тело, секу се у једној тачки.