Die vorteilhafteste Konstruktionshöhe

und Verlagsweite der Rippen der

# Hennebiqueschen Decke

Von Dr. M. Milankovitch

Chef-Ingenieur der Betonbau-Unternehmung

Adolf Baron Pittel

*Sonder-Abdruck aus der „Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereines“ 1906, Nr. 45*

Wien 1907 ▫ Im Selbstverlage des Verfassers

Druck der artistischen Anstalt von R. Spies & Co. in Wien

Wir wollen in dieser Abhandlung die Frage lösen: Wie soll bei der Dimensionierung der Hennebiqueschen Decke die Konstruktionshöhe und die Verlagsweite der Rippen gewählt werden, damit die Herstellungskosten der Decke das Minimum erreichen? Es ist dies eine der wichtigsten Fragen, die sich der Konstrukteur stellen muß, und die Ausbildung der Konstruktionen, die bei derselben Sicherheit ein Minimum der Herstellungskosten erfordern, eine der Hauptaufgaben der angewandten Mechanik.

Es bedeute:

$l$ die gegebene Stützweite der zu dimensionierenden Decke, ausgedrückt in $m$;

$g$ die Belastung der Decke, einschließlich Eigengewicht, ausgedrückt in $kg$ pro $m^2$;

$\lambda$ die zu bestimmende Verlagsweite der Rippen, ausgedrückt in $cm$;

$H$ die zu bestimmende Höhe der Rippen, ausgedrückt in $cm$.

Die Höhe der Rippe + Plattenstärke, die bekanntermaßen aus der Verlagsweite zu bestimmen ist, ergeben die Konstruktionshöhe der Decke. Um direkt an das Ziel zu gelangen, nehmen wir die zulässigen Inanspruchnahmen der beiden Materialien gleich mit den speziellen Werten an, und zwar mit Rücksicht auf die Verhältnisse in Österreich

$$s_b = 35\ kg/cm^2, \quad s_e = 1000\ kg/cm^2.$$

Es ist selbstverständlich, daß, falls andere Inanspruchnahmen gefordert werden, die hier angegebene Methode sich nicht ändert. Wir nehmen ferner, der Einfachheit halber, an, daß bei der Dimensionierung der Platte die Gesamtbelastung $g$ (statt der Plattenlast) in Rechnung gesetzt wird und daß die Eiseneinlage der Rippe nach der bekannten empirischen Formel

$$F_e = \frac{M}{1000\,H},$$

die übrigens ganz brauchbare Werte liefert, berechnet wird. Auch soll für die Rippenbreite $d$ (ausgedrückt in $cm$) der empirische Wert

$d^{(cm)} = 3{\cdot}4\, l^{(m)}$ angenommen werden, der mit den praktischen Ausführungen in Einklang steht. Falls die auf diese Weise gewonnenen Resultate mit den strengen Formeln nachkontrolliert werden, so überzeugt man sich, daß die gemachten Vereinfachungen zulässig sind.

Das für die Dimensionierung der Platte maßgebende Biegungsmoment $M_1$ der Platte ist in *kgcm*

$$M_1 = \frac{1}{12}\, 0{\cdot}01\, g\, \lambda^2$$

und die wirksame Höhe der Platte $h$ (ausgedrückt in *cm*) wird berechnet, entsprechend den angenommenen zulässigen Inanspruchnahmen, aus der bekannten Dimensionierungsformel

$$h = 0{\cdot}0435 \sqrt{M},$$

desgleichen wird die auf das laufende Meter des Plattenquerschnittes erforderliche Eiseneinlage $f_e$ (in $cm^2$) berechnet aus der Formel

$$f_e = 0{\cdot}0262 \sqrt{M},$$

demnach mit Rücksicht auf die Momentengleichung

$$h = 0{\cdot}00126 \sqrt{g}\, \lambda$$

$$f_e = 0{\cdot}00076 \sqrt{g}\, \lambda.$$

Das für die Dimensionierung der Rippe maßgebende Biegungsmoment $M_2$ ist (in *kgcm*)

$$M_2 = \frac{1}{8}\, g\, l^2\, \lambda$$

und demnach die erforderliche Eiseneinlage $F_e$ (in $cm^2$)

$$F_e = \frac{M_2}{1000\, H} = \frac{1}{8000}\, g\, l^2\, \frac{\lambda}{H}.$$

Die Herstellungskosten der Decke stellen sich zusammen aus den Herstellungskosten des Betons, den Kosten der Eiseneinlage und den Herstellungskosten der Schalung. Bei der Zusammenstellung derselben ist es nicht notwendig, den Betonquerschnitt unterhalb der Trageisen der Platte zu berücksichtigen, nachdem derselbe bei beliebiger Konstruktionshöhe der Decke und beliebiger Verlagsweite der Rippen unverändert bleibt; ebenso ist der Eisenbedarf für die Verlagseisen und Bügel, die nur einen geringen Teil des Eisenbedarfes ausmachen, nicht in Rechnung zu setzen. Auch von den Herstellungskosten der Schalung sind nur die Schalungskosten der beiden Seitenflächen der Rippe zu berücksichtigen, da der übrige Teil der Schalung von der Konstruktionshöhe und Verlagsweite der Rippen unabhängig ist. Die soeben aufgestellten Formeln beziehen sich auf 1 *m* Tiefe und geben die Abmessungen $h, H, \lambda, f_e, F_e$ und $d$ in *cm*; es ist deshalb als Betonpreis $b$, bezw. Eisenpreis $e$ der Preis eines Prismas von 1 $cm^2$ Querschnitt und 1 *m* Länge anzunehmen. Dieselben stellen sich in Österreich auf

$$b = 0{\cdot}34 \text{ Heller},$$
$$e = 30 \quad „ \quad .$$

Als Schalungspreis $s$ sind die Schalungskosten eines Rechtecks von 1 *cm* Breite und 1 *m* Länge einzusetzen, und ist als Mittelwert



$$s = 2 \text{ Heller}$$

angenommen worden. Die von der Konstruktionshöhe und der Verlagsweite $\lambda$ abhängigen Herstellungskosten eines Feldes der Decke von $\lambda$ *cm* Breite und 1 *m* Tiefe setzen sich demnach zusammen aus folgenden Positionen:

1. Herstellungskosten des Betons für die Platte im Betrage von
$$b \,.\, \lambda \,.\, h \text{ Heller.}$$
2. Herstellungskosten des Betons für die Rippe im Betrage von
$$b \,.\, d \,.\, H \text{ Heller.}$$
3. Kosten der Plattenarmatur im Betrage von
$$e \,.\, f_e \,.\, \frac{\lambda}{100} \text{ Heller,}$$

wo $\lambda$ (in *cm*) durch 100 dividiert werden mußte, nachdem sich $e$ auf ein Prisma von 1 *m* Länge bezieht.

4. Kosten der Rippenarmatur im Betrage von
$$e \,.\, F_e \text{ Heller.}$$
5. Schalungskosten im Betrage von
$$s \,.\, 2\, H \text{ Heller.}$$

Die variable Herstellungssumme $\pi$ des $m^2$ der Decke ist gleich der Summe der obigen fünf Positionen, dividiert durch $\frac{1}{100}\lambda$, wo jedoch der Koeffizient $\frac{1}{100}$ bei der Aufsuchung des Minimums von $\pi$ außeracht gelassen werden kann, demnach

$$\pi = b \,.\, h + b\, d \,.\, \frac{H}{\lambda} + \frac{1}{100}\, e \,.\, f_e + e\, \frac{F_e}{\lambda} + 2\, s\, \frac{H}{\lambda}.$$

Durch Einsetzung der vorher aufgestellten Werte folgt

$$\pi = 0{\cdot}34 \times 0{\cdot}00126 \sqrt{g}\, \lambda + 0{\cdot}34 \times 3{\cdot}4\, l\, \frac{H}{\lambda} + \frac{30}{100} \times 0{\cdot}00076 \sqrt{g}\, \lambda +$$
$$+ 30\, \frac{1}{8000}\, g\, l^2\, \frac{1}{H} + 4\, \frac{H}{\lambda}$$

oder nach Zusammenziehung

$$\pi = 0{\cdot}000656 \sqrt{g}\, \lambda + (1{\cdot}156\, l + 4)\, \frac{H}{\lambda} + 0{\cdot}00375\, g\, l^2\, \frac{1}{H}.$$

In dieser Gleichung sind nur noch $\lambda$ und $H$ unbekannt, und sollen jene Werte von $\lambda$ und $H$ gefunden werden, für welche der Wert $\pi$ ein Minimum wird; mit anderen Worten, es ist das Minimum der Funktion $\pi$ zweier Veränderlichen $\lambda$ und $H$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sind die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \pi}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial \pi}{\partial H}$ gleich Null zu setzen und aus den beiden Gleichungen die Wurzeln $\lambda$ und $H$ zu ermitteln.

Demnach

$$\frac{\partial \pi}{\partial \lambda} = 0{\cdot}000656 \sqrt{g} - (1{\cdot}156\, l + 4)\, \frac{H}{\lambda^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial H} = (1{\cdot}156\, l + 4)\, \frac{1}{\lambda} - 0{\cdot}00375\, g\, l^2\, \frac{1}{H^2} = 0$$

oder

$$0{\cdot}000656\, \sqrt{g}\, \lambda^2 = (1{\cdot}156\, l + 4)\, H,$$

$$0{\cdot}00375\, g\, l^2\, \lambda = (1{\cdot}156\, l + 4)\, H^2,$$

woraus:

$$\boldsymbol{\lambda = \sqrt[3]{8721\,(1{\cdot}156\, l + 4)\, l^2}}$$

$$\boldsymbol{H = \sqrt[3]{\frac{g^2\, l^4}{46{\cdot}5\,(1{\cdot}156\, l + 4)\sqrt{g}}}}.$$

Diese beiden Gleichungen geben die günstigste Verlagsweite und die günstigste Höhe der Rippen bei Zulassung der Inanspruchnahmen $s_b = 35\; kg/cm^2$, $s_e = 1000\; kg/cm^2$ direkt an. Es ist bemerkenswert, daß die Verlagsweite nur von der Stützweite abhängig ist. In folgender Tabelle sind die Werte von $\lambda$ für verschiedene Stützweiten angegeben.

**Tabelle I.**

Die günstigsten Verlagsweiten $\lambda$ der Rippen für verschiedene Stützweiten $l$ der Decke.

| Stützweite $l$ in $m$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Verlagsweite $\lambda$ in $cm$ | 106 | 129 | 151 | 173 | 195 | 217 | 238 |

Die Höhe $H$ der Rippe ist abhängig von der Stützweite $l$ und von der Belastung $g$. In folgender Tabelle sind die Werte von $H$ für verschiedene Stützweiten und Belastungen angegeben.

**Tabelle II.**

Die günstigsten Höhen $H$ der Rippen für verschiedene Stützweiten $l$ und Belastungen (einschließlich Eigengewicht) $g$ der Decke.

| $H =$ | Stützweite $l$ in $m$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Belastung $g$ in $kg$ pro $m^2$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 400 | 17 | 22 | 28 | 32 | 38 | 43 | 48 |
| 500 | 19 | 25 | 31 | 36 | 42 | 48 | 53 |
| 600 | 21 | 27 | 34 | 40 | 46 | 53 | 58 |
| 700 | 23 | 30 | 37 | 43 | 50 | 57 | 63 |
| 800 | 24 | 32 | 39 | 46 | 54 | 61 | 68 |
| 900 | 26 | 34 | 41 | 49 | 57 | 64 | 72 |
| 1000 | 27 | 35 | 44 | 51 | 60 | 68 | 76 |

Es bleibt noch zu untersuchen, ob der diesen Werten $\lambda$ und $H$ entsprechende Wert der Funktion $\pi$ tatsächlich ein Minimum ist. Zu diesem Zwecke bilden wir die drei partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda^2}$, $\frac{\partial^2 \pi}{\partial H^2}$ und $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda\, \partial H}$



$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda^2} = 2\,(1{\cdot}156\, l + 4)\, \frac{H}{\lambda^3},$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial H^2} = 2 \times 0{\cdot}00375\, g\, l^2\, \frac{1}{H^3},$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda\,.\,\partial H} = -\,(1{\cdot}156\, l + 4)\, \frac{1}{\lambda^2}.$$

Die Ausdrücke für $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda^2}$ und $\frac{\partial^2 \pi}{\partial H^2}$ sind für alle positiven Werte von $\lambda$ und $H$ positiv, also auch für die in den beiden Tabellen eingetragenen, wie es für das Eintreten eines Minimums erforderlich ist; es bleibt also nur zu beweisen, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial H^2} - \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda\, \partial H}\right]^2$$

auch positiv ist.

Es ist

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial H^2} - \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda\,.\,\partial H}\right]^2 = 4 \times 0{\cdot}00375 \times (1{\cdot}156\, l + 4)\, g\, l^2\, \frac{1}{\lambda^3\, H^2} - $$

$$- (1{\cdot}156\, l + 4)^2\, \frac{1}{\lambda^4} =$$

$$= (1{\cdot}156\, l + 4)\, \frac{1}{\lambda^3} \left\{3 \times 0{\cdot}00375\, g\, l^2\, \frac{1}{H^2} + 0{\cdot}00375\, g\, l^2\, \frac{1}{H^2} - (1{\cdot}156\, l + 4)\, \frac{1}{\lambda}\right\}$$

Nachdem die Summe der beiden letzten Glieder des Klammerausdruckes gleich $-\frac{\partial \pi}{\partial H}$, also gleich Null ist, so ist der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial H^2} - \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda\, \partial H}\right]^2 = 3 \times 0{\cdot}00375\, (1{\cdot}156\, l + 4)\, g\, l^2\, \frac{1}{\lambda^3\, H^2}$$

für alle positiven Werte von $\lambda$ und $H$ positiv, wodurch der Beweis erbracht ist, daß für die in den Tabellen eingetragenen Werte die Herstellungskosten der Decke tatsächlich das Minimum erreichen.

Es ist noch zu untersuchen, ob die Platte, als Druckgurt der Rippe aufgefaßt, nicht überbeansprucht ist, und man überzeugt sich durch die bekannte Berechnung der Druckbeanspruchung der Platte in der Richtung der Stützweite, daß dieselbe für alle in den Tabellen enthaltenen Typen unter der zulässigen Inanspruchnahme des Betons liegt.

Durch verschiedene Rücksichten — etwa durch beschränkte Konstruktionshöhe oder durch die gegebene Austeilung der Scheidemauern, welche die Austeilung der Rippen beeinflußt — ist man bei der praktischen Ausführung der Hennebiqueschen Decke nicht selten gezwungen, andere Konstruktionshöhen und Verlagsweiten der Rippen als die soeben abgeleiteten zu akzeptieren, doch hat die soeben entwickelte Methode der Bestimmung der theoretisch günstigsten Abmessungen der Decke auch für den Praktiker einen namhaften Wert.